Centre de Bernstein stable et conjecture d'Aubert-Baum-Plymen-Solleveld

Ahmed Moussaoui

Université Pierre et Marie Curie

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche

École Doctorale de Science Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Ahmed Moussaoui

Centre de Bernstein stable et conjecture d'Aubert-Baum-Plymen-Solleveld

---

dirigée par Anne-Marie Aubert

Soutenue le 16 juin 2015 devant le jury composé de :

Mme	Anne-Marie Aubert	CNRS
M.	Pascal Boyer	Université Paris Nord
M.	Jean-François Dat	Université Pierre et Marie Curie
M.	Nigel Higson	Penn State University
Mme	Colette Mœglin	CNRS
M.	Roger Plymen	Manchester University
M.	Maarten Solleveld	Radboud University

Université Pierre et Marie Curie
École Doctorale de Sciences
Mathématiques de Paris Centre
Case 290
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

Institut de Mathématiques de Jussieu-
Paris Rive Gauche
Case 247
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

Cette thèse est dédiée à mes parents,
mes frères, mes sœurs, ma famille d'ici et là bas.

Résumé

Résumé

Cette thèse s'intéresse aux liens entre la correspondance de Langlands locale et le centre de Bernstein. Pour cela, un cadre a été introduit par Vogan puis développé par Haines : le centre de Bernstein stable. Nous commençons par étendre la correspondance de Springer généralisée au groupe (non connexe) orthogonal. Ensuite, nous énonçons une conjecture concernant les paramètres de Langlands (complets) des représentations supercuspidales d'un groupe p-adique déployé que nous vérifions pour les groupes classiques et le groupe linéaire à l'aide des travaux de Mœglin, Henniart et Harris et Taylor. Nous définissons à l'aide des travaux de Lusztig sur la correspondance de Springer généralisée une application de support cuspidal pour les paramètres de Langlands complets. Avec certains résultats d'Heiermann, nous obtenons un paramétrage de Langlands des représentations irréductibles d'un groupe classique. Par ailleurs, nous énonçons une conjecture « galoisienne » analogue à la conjecture d'Aubert-Baum-Plymen-Solleveld, que nous prouvons à l'aide des résultats précédents. Ceci est une nouvelle preuve de la validité de la conjecture ABPS pour les groupes classiques et explicite ses relations avec la correspondance de Langlands. En conséquence, on obtient la compatibilité de la correspondance de Langlands avec l'induction parabolique pour les groupes classiques.

Mots-clefs

Correspondance de Langlands, centre de Bernstein stable, conjecture d'Aubert-Baum-Plymen-Solleveld, correspondance de Springer généralisée.

Stable Bernstein center and Aubert-Baum-Plymen-Solleveld conjecture

Abstract

This thesis focus on links between the local Langlands correspondence and the Bernstein center. A framework was introduced by Vogan and developed by Haines : the stable Bernstein center. We start by extending the generalized Springer correspondence to the orthogonal group (which is disconnected). Then we state a conjecture about (complete) Langlands parameters of supercuspidal representations of a p-adic split group and we prove it for classical and linear groups thanks to the work of Mœglin, Henniart and Harris and Taylor. Based on the work of Lusztig on generalized Springer correspondence, we define a cuspidal support map for complete Langlands parameters. Referring to some results of Heiermann, we get a Langlands parametrization of the smooth dual of classical groups. Moreover, we state "Galois" version of the Aubert-Baum-Plymen-Solleveld conjecture and we prove that with the previous results. It gives a new proof of the validity of the ABPS conjecture for classical groups and it provides explicit relations with Langlands correspondence. As a corrolary, we obtain the compatibility of the Langlands correspondence with parabolic induction for classical groups.

Keywords

Langlands correspondence, stable Bernstein center, Aubert-Baum-Plymen-Solleveld conjecture, generalized Springer correspondence.

Table des matières

Introduction

La correspondance de Langlands est un des moteurs essentiels en mathématiques ces dernières années. Le principal but de cette thèse est d'en comprendre les liens avec le centre de Bernstein.

Commençons par introduire le cadre général qui nous préoccupe.

Soit F un corps p-adique, G le groupe des F-points rationnels d'un groupe algébrique réductif connexe défini et déployé sur F. L'un des principaux résultats de la théorie du Centre de Bernstein est la décomposition de la catégorie des représentations lisses de G en sous-catégories pleines $\mathrm{Rep}(G)_{\mathfrak{s}}$, où $\mathfrak{s} = [M, \sigma]$ est la classe d'équivalence pour une certaine relation d'équivalence (dite inertielle) de (M, σ), avec M un sous-groupe de Levi de G et σ une représentation irréductible supercuspidale de M. On note $\mathbf{Irr}(G)_{\mathfrak{s}}$ l'ensemble des (classes de) représentations irréductibles de G admettant $\mathfrak{s}$ pour support inertiel. À toute paire inertielle $\mathfrak{s}$ est associée un tore $T_{\mathfrak{s}}$, un groupe fini $W_{\mathfrak{s}}$, une action de $W_{\mathfrak{s}}$ sur $T_{\mathfrak{s}}$ et on dispose de la notion de support cuspidal $\mathbf{Sc} : \mathbf{Irr}(G)_{\mathfrak{s}} \longrightarrow T_{\mathfrak{s}}/W_{\mathfrak{s}}$.

La correspondance de Langlands fournit conjecturalement une description des représentations irréductibles de G. Notons $\widehat{G}$ le dual de Langlands de G, $W'_F = W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et $WD_F = \mathbf{C} \rtimes W_F$ les groupes de Weil-Deligne. À tout paramètre de Langlands $\phi : W'_F \longrightarrow \widehat{G}$ (ou (λ, N) avec $\lambda : W_F \longrightarrow \widehat{G}$ et $N \in \mathrm{Lie}(\widehat{G})$ vérifiant certaines propriétés), est associé un « paquet » de représentations de G noté habituellement $\Pi_\phi(G)$. Dans [Lus83], Lusztig introduit un certain groupe fini pour paramétrer le L-paquet. Ce paquet de représentations est paramétré par un groupe fini qui est, à peu de choses près, $A_{\widehat{G}}(\phi) = Z_{\widehat{G}}(\phi)/Z_{\widehat{G}}(\phi)^\circ$, le groupe des composantes du centralisateur de l'image $\phi(W'_F)$ dans $\widehat{G}$.

En général, dans un L-paquet il y a des représentations de support cuspidal différents, voire des représentations supercuspidales et des représentations non-supercuspidales. Le centre de Berstein stable va permettre d'exprimer une compatibilité entre le paramétrage des représentations irréductibles en blocs de Bernstein et le paramétrage en L-paquets. C'est l'objet de la proposition 4.8. Si $\lambda : WD_F \longrightarrow \widehat{G}$ est un paramètre discret de G, trivial sur $\mathbf{C}$, on conjecture que le L-paquet qu'il définit $\Pi_\lambda(G)$ n'est constitué que de représentations supercuspidales de G. En revanche, à notre connaissance, il n'est pas décrit de façon général dans la littérature quels paramètres de Langlands conjecturalement définissent les L-paquets contenant des représentations supercuspidales. Précisons tout de même que pour le groupe linéaire, nous savons que les représentations irréductibles supercuspidales de GL_n correspondent aux paramètres discrets $\lambda : W_F \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Pour les groupes classiques (en particulier orthogonal et symplectique), en conséquence des travaux d'Arthur, Mœglin a décrit la forme des paramètres de Langlands et les caractères du groupe fini paramétrant le paquet correspondent aux représentations supercuspidales. Pour le problème qui nous intéressera dans la suite, à savoir le lien entre l'induction parabolique et la correspondance de Langlands, rappelons la conjecture :

Conjecture (Vogan [Vog93, p. 7.18], Haines [Hai14, p. 5.2.2]). *Soit M un sous-groupe de Levi de G, σ une représentation irréductible supercuspidale de M et π un sous-quotient irréductible de $i_P^G(\sigma)$, avec P un sous-groupe parabolique de G de Levi M et i_P^G le foncteur d'induction parabolique normalisée. La correspondance de Langlands pour M (resp. pour G) associe à σ (resp. π) un paramètre $(\lambda_\sigma, N_\sigma)$ avec $\lambda_\sigma : W_F \longrightarrow \widehat{M}$ (resp. (λ_π, N_π) et $\lambda_\pi : W_F \longrightarrow \widehat{G}$) . À $\widehat{G}$-conjugaison près, on a un plongement naturel $\widehat{M} \hookrightarrow \widehat{G}$ et on peut pousser en avant $\lambda_\sigma : W_F \longrightarrow \widehat{M} \hookrightarrow \widehat{G}$. La correspondance de Langlands devrait être compatible avec l'égalité suivante (à $\widehat{G}$-conjugaison près)*

$$\lambda_\sigma \equiv \lambda_\pi.$$

Revenons à la décomposition de Bernstein précédemment évoquée. Fixons une paire inertielle $\mathfrak{s}$ de G et rappelons qu'à une telle paire inertielle est associée un tore $T_\mathfrak{s}$, un groupe fini $W_\mathfrak{s}$ et une action de $W_\mathfrak{s}$ sur $T_\mathfrak{s}$. Récemment, Aubert, Baum, Plymen et Solleveld ont conjecturé qu'il y avait une structure géométrique « simple » en bijection avec $\mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s}$ et qui est obtenue explicitement à partir de $T_\mathfrak{s}$, $W_\mathfrak{s}$ et de l'action de ce dernier sur $T_\mathfrak{s}$. Plus précisément, ils définissent un objet appelé quotient étendu de la façon suivante. Soit

$$X_\mathfrak{s} = \{(t, w) \in T_\mathfrak{s} \times W_\mathfrak{s},\ w \cdot t = t\}.$$

Alors $W_\mathfrak{s}$ agit de la façon suivante sur $X_\mathfrak{s}$:

$$s(t, w) = (s \cdot t, sws^{-1}),\ \ s \in W_\mathfrak{s}, (t, w) \in X_\mathfrak{s}.$$

On appelle quotient étendu (géométrique) de $T_\mathfrak{s}$ pour l'action de $W_\mathfrak{s}$ et on note $T_\mathfrak{s} /\!\!/ W_\mathfrak{s}$ le quotient $X_\mathfrak{s}/W_\mathfrak{s}$. On dispose d'une projetion $\mathbf{p} : T_\mathfrak{s} /\!\!/ W_\mathfrak{s} \longrightarrow T_\mathfrak{s}/W_\mathfrak{s}$ (c'est la projection sur la première composante).

Si on dispose d'une bijection $\mu_\mathfrak{s} : T_\mathfrak{s} /\!\!/ W_\mathfrak{s} \longrightarrow \mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s}$, on peut naturellement se demander s'il y a un lien entre la composée $\mathbf{Sc} \circ \mu_\mathfrak{s}$ et la projection $\mathbf{p}$. En général, ces deux applications n'ont pas de raison d'être égales. En revanche, ils conjecturent qu'il y a des cocaractères $h_c : \mathbf{C}^\times \longrightarrow T_\mathfrak{s}$ pour chaque composante irréductible c de $T_\mathfrak{s} /\!\!/ W_\mathfrak{s}$ tels que la composée $(\mathbf{Sc} \circ \mu_\mathfrak{s})(t, w)$ soit égale à $\mathbf{p}(h_c(q^{1/2})t, w)$. Autrement dit, en tordant par un cocaractère, on retrouve le support cuspidal. De plus, ce cocaractère devrait avoir un lien avec le paramètre de Langlands de $\mu_\mathfrak{s}(t, w)$. Nous n'entrons pas plus dans les détails pour le moment mais signalons que ceci suggère fortement les liens entre la correspondance de Langlands et le centre de Bernstein.

Au début des années 90, Vogan a introduit un analogue pour les paramètres de Langlands du centre de Bernstein, qu'il a qualifié de centre de Bernstein « stable » et qui a été revisité récemment par Haines dans [Hai14]. Comme nous l'avons écrit précédemment, la conjecture ABPS suggère les liens entre la correspondance de Langlands et le centre de Bernstein. Le quotient étendu qu'Aubert, Baum, Plymen et Solleveld considèrent, devrait donc se retrouver d'une façon ou d'une autre dans le centre de Bernstein stable.

Décrivons à présent les idées et les résultats de cette thèse.

Un des principaux outils dont on se servira dans cette thèse est la correspondance de Springer généralisée et ses dérivées que Lusztig a profondément étudiée. Pour l'utiliser dans le cadre qui nous intéresse, nous étendons la correspondance de Springer généralisée au groupe orthogonal et à certaines variantes (groupes qui ne sont pas connexes).

La principale idée dans l'étude des liens entre le Centre de Bernstein et de la correspondance de Langlands est de traduire uniquement en terme de paramètres de Langlands complets la décomposition de Bernstein. Pour cela, nous définissons de façon générale (pour un groupe réductif p-adique déployé) une notion de paramètre de Langlands (complet) cuspidal et conjecturons qu'ils correspondent aux représentations supercuspidales. Cette définition fait intervenir l'existence d'orbites unipotentes supportant un système local cuspidal au sens de Lusztig. Plus précisément, notons soit φ un paramètre de Langlands de G, notons $\mathcal{S}_\varphi^G$ le groupe des composantes de $Z_{\widehat{G}}(\varphi)/Z_{\widehat{G}}$ et ε une représentation irréductible de $\mathcal{S}_\varphi^G$. On a une surjection $A_{\widehat{G}}(\varphi) \twoheadrightarrow \mathcal{S}_\varphi^G$ et on remarque que $A_{\widehat{G}}(\varphi) = A_{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F})}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$. Notons $\widetilde{\varepsilon}$ la composition de ε avec cette projection. De plus, $A_{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F})^\circ}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$ est un sous-groupe distingué de $A_{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F})}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$. On peut énoncer notre définition et la conjecture.

Définition. On dit que φ est un paramètre cuspidal de G si φ est discret et qu'il existe une représentation irréductible ε de $\mathcal{S}_\varphi^G$ telle que toutes les représentations irréductibles de $A_{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F})^\circ}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$ apparaissant dans la restriction $\widetilde{\varepsilon}\big|_{A_{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F})^\circ}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})}$, sont cuspidales dans le sens de Lusztig. On note $\mathbf{Irr}(\mathcal{S}_\varphi^G)_{\mathrm{cusp}}$ l'ensemble des représentations irréductible ε vérifiant la condition précédente (il peut être donc être vide).

Conjecture. *Soit $\varphi : W_F' \longrightarrow \widehat{G}$ un paramètre de Langlands de G cuspidal. Alors le L-paquet $\Pi_\varphi(G)$ contient des représentations supercuspidales de G, qu'on note $\Pi_\varphi(G)_{\mathrm{cusp}}$ et elles sont paramétrées par $\mathbf{Irr}(\mathcal{S}_\varphi^G)_{\mathrm{cusp}}$. Autrement dit, il existe une bijection :*

$$\Pi_\varphi(G)_{\mathrm{cusp}} \simeq \mathbf{Irr}(\mathcal{S}_\varphi^G)_{\mathrm{cusp}}.$$

Nous prouvons la validité de cette conjecture à l'aide des résultats connus pour la correspondance de Langlands pour GL_n et pour les groupes classiques d'après les travaux d'Arthur et Mœglin dans la proposition 4.14. Nous définissons des triplets formés d'un sous-groupe de Levi de $\widehat{G}$ et d'un paramètre de Langlands complet cuspidal. Ces triplets jouent le rôle des paires cuspidales et inertielles pour le centre de Bernstein de G. Nous définissons des relations d'équivalence cuspidale et inertielle sur l'ensemble de ces triplets et associons alors à toute telle classe inertielle $\mathscr{j}$ un tore complexe $\mathcal{T}_{\mathscr{j}}$, un groupe fini $\mathcal{W}_{\mathscr{j}}$ définis uniquement en terme de paramètres de Langlands complets. Les classes d'équivalence cuspidales sur ces triplets seront notées $\Omega(G)^+_{\mathrm{st}}$ et les classes d'équivalence inertielles notées $\mathcal{B}(G)^+_{\mathrm{st}}$. On notera $\Phi(G)^+$ l'ensemble des paramètres de Langlands complets de G, c'est-à-dire l'ensemble des couples (ϕ, η) formés d'un paramètre de Langlands ϕ de G et d'une représentation irréductible η de $\mathcal{S}_\phi^G$. Nous conjecturons qu'en général la correspondance de Langlands met en bijection ces objets et est compatible aux actions des groupes finis correspondants. Nous montrons lorsque $\lambda : W_F \longrightarrow \widehat{M}$ est un paramètre de Langlands discret d'un sous-groupe de Levi M de G, tous les paramètres de Langlands complets de M de la forme (λ, ε) sont cuspidaux. Nous conjecturons que si la paire inertielle $\mathfrak{s}$ pour G et le triplet inertiel $\mathscr{j}$ pour $\widehat{G}$ se correspondent via la conjecture 4.13, alors

Conjecture. *Il existe des isomorphismes*

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathfrak{s}} & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\mathscr{j}} \\ \chi & \longmapsto & \widehat{\chi} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} W_{\mathfrak{s}} & \longrightarrow & \mathcal{W}_{\mathscr{j}} \\ w & \longmapsto & \widehat{w} \end{array},$$

tels que pour tout $\chi \in T_{\mathfrak{s}},\ w \in W_{\mathfrak{s}}$:

$$\widehat{w \cdot \chi} = \widehat{w} \cdot \widehat{\chi}.$$

Cette conjecture sera vérifiée pour les groupes classiques dans le théorème 5.6.

À la suite de cela, nous construction le « support cuspidal partiel » d'un paramètre de Langlands complets d'un groupe déployé G. Plus précisément, on associe à tout paramètre de Langlands complet de G, la classe d'un triplet formé d'un sous-groupe de Levi $\widehat{L}$ de $\widehat{G}$, d'un paramètre de Langlands cuspidal de L et d'une représentation irréductible d'un sous-groupe de $\mathcal{S}_{\varphi}^{L}$. Malheureusement, ici le résultat est partiel car on n'obtient pas une représentation irréductible cuspidale du groupe $\mathcal{S}_{\varphi}^{L}$.
En revanche, pour les groupes classiques GL_n, SO_N, Sp_{2n}, nous définissons entièrement le support cuspidal de tout paramètre de Langlands complet.
On obtient un paramétrage des paramètres de Langlands complets (ϕ, η) en fonction d'un bloc défini par $\mathscr{j} = [\widehat{L}, \varphi, \varepsilon]$ et d'une représentation irréductible d'un groupe de Weyl étendu $\mathcal{W}$, où $\widehat{L}$ est un sous-groupe de Levi et (φ, ε) un paramètre de Langlands complet cuspidal de L. C'est l'objet du théorème 4.27.

Théorème. *Soit G un groupe classique déployé. Alors, il existe une surjection*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}_c : & \Phi(G)^+ & \longrightarrow & \Omega(G)^+_{\mathrm{st}} \\ & (\phi, \eta) & \longmapsto & (\widehat{L}, \varphi, \varepsilon) \end{array}.$$

De plus, les fibres de cette application sont paramétrées par les représentations irréductibles de $N_{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F}\chi_c)}(A_{\widehat{L}})/Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F}\chi_c)$, où c parcourt l'ensemble (fini) des cocaractères correcteurs de φ dans $\widehat{G}$.

Par la suite, à l'aide des résultats précédents, Nous énonçons un analogue « galoisien » à la conjecture d'Aubert-Baum-Plymen-Solleveld en terme de paramètres de Langlands complets. Plus précisément, si $\mathscr{j} = [\widehat{L}, \varphi, \varepsilon] \in \mathcal{B}(G)^+_{\mathrm{st}}$ est un L-triplet inertiel, $\Phi(G)^+_{\mathscr{j}}$ l'image réciproque de $\mathscr{j}$ par l'application construite précedemment, $\mathcal{T}_{\mathscr{j}}$ et $\mathcal{W}_{\mathscr{j}}$ le tore et le groupe de Weyl associé, alors on conjecture qu'il existe une bijection

$$\Phi(G)^+_{\mathscr{j}} \simeq \mathcal{T}_{\mathscr{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}_{\mathscr{j}}}.$$

Nous prouvons cette conjecture dans le cas des groupes classiques dans le théorème 5.5. Remarquons qu'on ne suppose pas la correspondance de Langlands à ce stade. En revanche, à la suite de cela, à l'aide des travaux d'Heiermann et de Lusztig, nous prouvons la conjecture ABPS pour les groupes classiques dans le théoreme 5.7 et en conséquence, on obtient la compatibilité de la correspondance de Langlands avec l'induction parabolique dans le théorème 5.9.

À présent, décrivons le plan.

Dans le premier chapitre de cette thèse, après avoir rappelé quelques généralités sur la correspondance de Springer généralisée et le paramétrage des orbites unipotentes pour les groupes classiques, nous montrons qu'étant donné un groupe réductif complexe non nécessairement connexe H, la correspondance de Springer pour H° est H-équivariante.
Ce résultat général nous sert ensuite pour définir et montrer la correspondance de Springer généralisée pour le groupe orthogonal (ainsi qu'une variante faisant intervenir un produit de groupes orthogonaux). Notons au passage que la généralisation de la correspondance de Springer (ordinaire) du cas connexe au cas non-connexe est prouvée et intervient dans

la preuve de la validité de la conjecture ABPS pour les représentations de la série principale [Aub+14b]. Une telle généralisation (mais obtenue d'une autre façon) figure aussi dans [BEG03].

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques généralités sur la correspondance de Langlands locale. Nous décrivons les centralisateurs des paramètres de Langlands dans le cas des groupes classiques et nous suivons [Gan+12, §4]. Enfin, nous rappelons le paramétrage des représentations irréductibles supercuspidales pour les groupes classiques obtenu par les travaux d'Arthur et Mœglin.

Dans le troisième chapitre, nous résumons les résultats d'Heiermann concernant l'équivalence de catégories un bloc de Bernstein $\mathrm{Rep}(G)_{\mathfrak{s}}$ et les modules sur une algèbre de Hecke affine étendue avec paramètres. Pour préparer les résultats qui suivront, nous rappelons également les résultats de Lusztig sur les algèbres de Hecke graduées associées à un triplet cuspidal. Pour cela, une référence très utile est [Ciu08] et [BC13].

Dans le quatrième chapitre, après avoir rappelé les constructions de Haines du centre de Bernstein stable, nous définissons les notions de paramètres de Langlands complets cuspidaux. Nous énonçons la conjecture sur le paramétrage des représentations supercuspidales et nous la prouvons pour les groupes classiques. Nous introduisons ensuite les triplets cuspidaux et inertiels ainsi que les objets qui y sont attachés. Nous énonçons alors les conjectures qui y sont attachées naturellement.
Le reste du chapitre est consacré à la construction du « support cuspidal » pour les paramètres de Langlands complets.

Dans le cinquième chapitre, après avoir rappelé la conjecture ABPS, nous énonçons et prouvons l'analogue galoisien de cette conjecture. Ceci montre que le quotient étendu $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}/\!/\mathcal{W}_{\mathcal{J}}$ est une structure géométrique qui apparait naturellement dans l'étude des liens entre la correspondance de Langlands et le centre de Bernstein stable. Par ailleurs, le cocaractère $h_c : \mathbf{C}^\times \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ servant à déformer la projection standard est obtenu dans les constructions de la fin du chapitre précédent et il fait intervenir les paramètres de Langlands.
À l'aide du paramétrage obtenu pour les groupes classiques (on ne suppose donc pas la correspondance de Langlands), des algèbres de Hecke graduées définis par Lusztig, les résultats d'Heiermann et du paramétrage des représentations supercuspidales des groupes classiques, on obtient un paramétrage des représentations irréductibles des groupes classiques. Ceci montre la validité pour les groupes classiques de la conjecture ABPS et de la conjecture de compatibilité de la correspondance de Langlands avec l'induction parabolique (conjecture 4.5). La fin du chapitre est consacrée à l'étude d'exemples pour illustrer les constructions et l'intérêt de la conjecture ABPS.

Notons au passage que la conjecture ABPS est prouvée pour GL_n [ABP07], pour les paires inertielles de la série principale d'un groupe déployé [Aub+14a] et [Aub+14b]. De plus, grâce aux travaux de Solleveld [Sol12] (qui prouve une version de la conjecture ABPS pour les algèbres de Hecke) et d'Heiermann [Hei11], la conjecture ABPS était déjà prouvée pour les groupes classiques. En revanche, on n'avait pas la propriété concernant les L-paquets (ni la formule explicite du cocaractère correcteur en fonction des paramètres de Langlands).

Chapitre 1

Correspondance de Springer

1.1 Correspondance de Springer généralisée

Soit H un groupe algébrique linéaire complexe réductif et $x \in H$ un élément de H. On note $Z_H(x) = \{g \in H, gxg^{-1} = x\}$ le centralisateur de x dans H et $A_H(x) = Z_H(x)/Z_H(x)^\circ$ le groupe des composantes du centralisateur de x de H.
Supposons désormais que H est connexe. On a une bijection naturelle entre les représentations irréductibles de $A_H(x)$ et les systèmes locaux H-équivariants irréductibles sur $\mathcal{C}_x^H$, où $\mathcal{C}_x^H = \{gxg^{-1}, g \in H\}$ désigne la H-classe de conjugaison de x (voir [JN04, 12.10]). Dans la suite, on s'intéressera aux orbites unipotentes de H (ou aux orbites nilpotentes de l'algèbre de Lie de H), c'est à dire aux H-classes de conjugaison d'éléments unipotents de H. On note $\mathcal{N}_H^+$ le cône unipotent «complet», c'est à dire l'ensemble des H-classes de conjugaison des couples formés d'un élément unipotent u de H et d'une représentation irréductible du groupe des composantes du centralisateur dans H de u.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_H^+ &= \{(u, \eta),\ u \in H \text{ unipotent},\ \eta \in \mathbf{Irr}(A_H(u))\}_{/H-\text{conj}} \\ &\simeq \{(\mathcal{C}_u^H, \mathcal{F}),\ u \in H \text{ unipotent},\ \mathcal{F} \text{ système local irréductible } H\text{-équivariant sur } \mathcal{C}_u^H\}. \end{aligned}$$

Définition 1.1. Un système local $\mathcal{L}$ irréductible L-équivariant sur $\mathcal{C}_v^L$ est dit cuspidal, si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique propre Q de L, de radical unipotent U et pour tout élément unipotent $g \in Q$, la cohomologie à support compact de $gU \cap \mathcal{C}_v^L$ à coefficient dans la restriction de $\mathcal{L}$ est nulle (voir [Lus84, 6.2]).

Soit P un sous-groupe parabolique de H de décomposition de Levi $P = LU$ et soit $u \in H$ (resp. $v \in L$) un élément unipotent. Notons

$$Y_{u,v} = \left\{gZ_L(v)^\circ U,\ g \in H, g^{-1}ug \in vU\right\},$$

et

$$d_{u,v} = \frac{1}{2}\left(\dim Z_H(u) - \dim Z_L(v)\right).$$

D'après Springer et Lusztig [Lus84, §1], $\dim Y_{u,v} \leqslant d_{u,v}$ et le groupe $Z_H(u)$ agit par translation à gauche sur $Y_{u,v}$. Notons $S_{u,v}$ la représentation par permutation sur les composantes irréductibles de dimension $d_{u,v}$ de $Y_{u,v}$.

Définition 1.2. Soit $\tau \in \mathbf{Irr}(A_H(u))$. On dit que τ est cuspidale, si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique propre $P = LU$ de H, pour tout élément unipotent $v \in L$,

$$\mathrm{Hom}(\tau, S_{u,v}) = 0.$$

Si $\mathcal{L}$ est un système local irréductible H-équivariant sur $\mathcal{C}_u^H$ cuspidal, alors la représentation irréductible du groupe fini $A_H(u)$ est cuspidale dans le sens précédent et réciproquement. On appelera paire cuspidale, tout couple (u, τ) (ou $(\mathcal{C}_u^H, \mathcal{L})$) formé d'un élément unipotent et d'une représentation irréductible cuspidale de $A_H(u)$ (ou d'un système local cuspidal au sens précédent).

Notons $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des classes (de conjugaison par H) de triplets $\mathfrak{t} = [L, \mathcal{C}_v^L, \mathcal{L}]$ formés de

— un sous-groupe de Levi L de H ;

— une L-orbite $\mathcal{C}_v^L$, d'un élément unipotent $v \in L$;

— un système local $\mathcal{L}$ irréductible cuspidal L-équivariant sur $\mathcal{C}_v^L$.

On appellera un tel triplet, un support unipotent cuspidal.

Dans [Lus84], Lusztig associe à chaque couple $(u, \mathcal{F}) \in \mathcal{N}_H^+$ un unique triplet $\mathfrak{t} \in \mathcal{S}_H$. Notons $\Psi_H : \mathcal{N}_H^+ \longrightarrow \mathcal{S}_H$ cette application. Elle induit alors une partition de $\mathcal{N}_H^+$:

$$\mathcal{N}_H^+ = \bigsqcup_{\mathfrak{t} \in \mathcal{S}_H} \mathcal{M}_{\mathfrak{t}},$$

où $\mathcal{M}_{\mathfrak{t}}$ désigne l'ensemble des $(u, \mathcal{F}) \in \mathcal{N}_H^+$ tels que $\Psi_H(u, \mathcal{F}) = \mathfrak{t}$. Pour tout $\mathfrak{t} = [L, \mathcal{C}, \mathcal{L}] \in \mathcal{S}_H$, soit $S = Z_L^\circ \cdot \mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ le système local L-équivariant sur S obtenue en tirant en arrière $\mathcal{L}$ via la projection $Z_L^\circ \cdot \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$. Notons

$$W_{\mathfrak{t}} = \left\{ n \in N_H(L), nSn^{-1} = S, n^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{E} \right\} / L.$$

D'après [Lus84, 9.2],

$$W_{\mathfrak{t}} \simeq N_H(L)/L,$$

et c'est un groupe de Coxeter fini.

Remarque 1.3. Soit $v \in \mathcal{C}$ et $\gamma : \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \longrightarrow L$ un morphisme algébrique tel que

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v.$$

Notons $T = Z_L^\circ$ et $Z = Z_H(\gamma)^\circ$. D'après [Lus88, 2.6], T est un tore maximal de Z et on a l'isomorphisme suivant : $W_{\mathfrak{t}} \simeq N_H(L)/L \simeq N_Z(T)/T$.

Rappelons qu'il y a un ordre partiel sur l'ensemble des orbites unipotentes de H : si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont deux orbites unipotentes de H,

$$\mathcal{O} \leqslant \mathcal{O}' \Leftrightarrow \mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}'},$$

où $\overline{\mathcal{O}'}$ désigne l'adhérence de $\mathcal{O}'$. Par ailleurs, d'après [Lus84, 6.5] et [Lus95b, 6.5], pour tout $(\mathcal{O}, \mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{\mathfrak{t}}$, on a :

$$H \cdot \mathcal{C} \leqslant \mathcal{O} \leqslant \mathrm{Ind}_L^H(\mathcal{C}),$$

où $\mathrm{Ind}_L^H(\mathcal{C})$ est l'orbite induite de Lusztig-Spalteinstein. Notons $\mathcal{C}_{\mathfrak{t}}^{\min} = H \cdot \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{\mathfrak{t}}^{\max} = \mathrm{Ind}_L^H(\mathcal{C})$. Chacune de ces orbites supporte un système local irréductible particulier défini en [Lus84, 9.2,9.5] qu'on note $\mathcal{L}_{\mathfrak{t}}^{\min}$ pour $\mathcal{C}_{\mathfrak{t}}^{\min}$ et $\mathcal{L}_{\mathfrak{t}}^{\max}$ pour $\mathcal{C}_{\mathfrak{t}}^{\max}$. On peut énoncer la correspondance de Springer généralisée.

Théorème 1.4 (Lusztig,[Lus84, 6.5]). *Avec les notations précédentes, pour tout* $\mathfrak{t} \in \mathcal{S}_H$, *on a unique une bijection* $\Sigma_{\mathfrak{t}} : \mathcal{M}_{\mathfrak{t}} \longrightarrow \mathbf{Irr}(W_{\mathfrak{t}})$, *telle que*

$$\Sigma_{\mathfrak{t}}(\mathcal{C}_{\mathfrak{t}}^{\min}, \mathcal{L}_{\mathfrak{t}}^{\min}) = \mathrm{triv} \quad \textit{et} \quad \Sigma_{\mathfrak{t}}(\mathcal{C}_{\mathfrak{t}}^{\max}, \mathcal{L}_{\mathfrak{t}}^{\max}) = \mathrm{sgn}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}_H^+ \simeq \bigsqcup_{\mathfrak{t} \in \mathcal{S}_H} \mathbf{Irr}(W_{\mathfrak{t}}).$$

Remarque 1.5. Dans [Lus84], la correspondance de Springer généralisée est telle que $\Sigma_{\mathfrak{t}}(\mathcal{C}_{\mathfrak{t}}^{\min}, \mathcal{L}_{\mathfrak{t}}^{\min}) = \mathrm{sgn}$ et $\Sigma_{\mathfrak{t}}(\mathcal{C}_{\mathfrak{t}}^{\max}, \mathcal{L}_{\mathfrak{t}}^{\max}) = \mathrm{triv}$ (voir [Lus84, 9.2,9.5]). La normalisation que l'on a choisie est donc la tensorisation par le caractère signature de la correspondance de Springer définie par Lusztig.

1.2 Orbites unipotentes et paires cuspidales pour les groupes classiques

On rappelle qu'une partition $\mathbf{p}$ d'un entier $n \geqslant 1$ est une suite décroissante d'entiers $p_1 \geqslant \ldots \geqslant p_k \geqslant 1$ telle que $n = p_1 + \ldots + p_k$. A priori, les p_i ne sont pas distincts deux à deux. Soit $q_1 > \ldots > q_s$ les entiers deux à deux distincts tels que $\{p_i,\, 1 \leqslant i \leqslant k\} = \{q_j,\, 1 \leqslant j \leqslant s\}$ et r_q le nombre de fois que q apparait dans $\mathbf{p}$. Nous utiliserons la notation $\mathbf{p} = (q_1^{r_{q_1}}, \ldots, q_s^{r_{q_s}})$, si bien que, $n = p_1 + \ldots + p_k = r_{q_1} q_1 + \ldots + r_{q_s} q_s$. Les q_j (ou p_i) s'appellent les parts de la partition $\mathbf{p}$ et r_{q_j} la multiplicité de la part q_j.

Rappelons brièvement la classification des orbites unipotentes et de leurs centralisateurs dans certains groupes classiques (voir [CM93, §5.1 & §6.1] et [JN04, §3.8]). Pour toute partition $\mathbf{p}$, nous noterons $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}$ l'orbite unipotente associé à la partition $\mathbf{p}$ par la décomposition de Jordan. Dans un cas, il correspondra à une même partition $\mathbf{p}$ deux orbites unipotentes distinctes que l'on notera $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}^{I}$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}^{II}$.

— pour $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ les orbites unipotentes sont en bijection avec les partitions de n via la décomposition de Jordan ;

— pour $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})$, les orbites unipotentes sont en bijection avec les partitions de $2n$ pour lesquelles les parts impaires admettent une multiplicité paire ;

— pour $\mathrm{SO}_n(\mathbf{C})$, les partitions de n pour lesquelles les parts paires admettent une multiplicité paire et toutes les parts ne sont pas paires correspondent à une orbite unipotente. Les partitions de n qui n'admettent que des parts paires, de multiplicités paires correspondent à deux orbites unipotentes distinctes. Ce dernier cas ne se produit que si n est pair.

Pour résumer :

G	partition	orbite	centralisateur
$\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$		$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{p}}$	$Z_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})}(u)_{\mathrm{red}} \simeq \prod_{q\in\mathbf{p}} \mathrm{GL}_{r_q}(\mathbf{C})$
$\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$		$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{p}}$	$Z_{\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})}(u)_{\mathrm{red}} \simeq \left(\prod_{q\in\mathbf{p}} \mathrm{GL}_{r_q}(\mathbf{C})\right)^+$
$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})$	$\forall q \in \mathbf{p}, q$ impair $\Rightarrow r_q$ pair	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{p}}$	$Z_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})}(u)_{\mathrm{red}} \simeq \prod_{\substack{q\in\mathbf{p}\\ q \text{ pair}}} \mathrm{O}_{r_q}(\mathbf{C}) \times \prod_{\substack{q\in\mathbf{p}\\ q \text{ impair}}} \mathrm{Sp}_{r_q}(\mathbf{C})$
$\mathrm{SO}_n(\mathbf{C})$	$\forall q \in \mathbf{p}, q$ pair $\Rightarrow r_q$ pair	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{p}}$	$Z_{\mathrm{O}_n(\mathbf{C})}(u)_{\mathrm{red}} \simeq \prod_{\substack{q\in\mathbf{p}\\ q \text{ impair}}} \mathrm{O}_{r_q}(\mathbf{C}) \times \prod_{\substack{q\in\mathbf{p}\\ q \text{ pair}}} \mathrm{Sp}_{r_q}(\mathbf{C})$
	$\forall q \in \mathbf{p},\ q$ et r_q pair	$\mathbf{p} \leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{O}^I_{\mathbf{p}} \\ \mathcal{O}^{II}_{\mathbf{p}} \end{cases}$	$Z_{\mathrm{SO}_n(\mathbf{C})}(u)_{\mathrm{red}} \simeq \left(\prod_{\substack{q\in\mathbf{p}\\ q \text{ impair}}} \mathrm{O}_{r_q}(\mathbf{C})\right)^+ \times \prod_{\substack{q\in\mathbf{p}\\ q \text{ pair}}} \mathrm{Sp}_{r_q}(\mathbf{C})$

TABLE 1.1: Orbites unipotentes des groupes classiques

Où l'on a noté $Z_G(u)_{\mathrm{red}}$ le quotient de $Z_G(u)$ par son radical unipotent et :

$$\left(\prod_{\substack{q\in\mathbf{p}\\ q \text{ impair}}} \mathrm{O}_{r_q}(\mathbf{C})\right)^+ = \left\{(x_q) \in \prod_{\substack{q\in\mathbf{p}\\ q \text{ impair}}} \mathrm{O}_{r_q}(\mathbf{C}),\ \prod_{\substack{q\in\mathbf{p}\\ q \text{ impair}}} \det(x_q)^{r_q} = 1\right\}.$$

Les paires cuspidales sont assez rares. Elles apparaissent comme les blocs fondamentaux dans la correspondance de Springer généralisée. Dans [Lus84, §10, 12.4 & 13.4] et [Lus14], Lusztig classifie les paires cuspidales pour les groupes classiques. Nous résumons les résultats dans le tableau ci-dessous.

H	condition	orbite unipotente	$A_H(u)$	paire cuspidale $(\mathcal{C}, \tau)$
$\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$	$n = 1$	$\mathcal{O}_{(1)}$	$\{1\}$	$(\mathcal{O}_{(1)}, 1)$
$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})$	$2n = d(d+1)$	$\mathcal{O}_{(2d,2d-2,\dots,4,2)}$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$	$(\mathcal{O}_{(2d,2d-2,\dots,4,2)}, \tau_{2n})$
$\mathrm{SO}_n(\mathbf{C})$	$n = d^2$	$\mathcal{O}_{(2d-1,2d-3,\dots,3,1)}$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{d-1}$	$(\mathcal{O}_{(2d-1,2d-3,\dots,3,1)}, \varepsilon_n)$

TABLE 1.2: Paires cuspidales pour les groupes classiques

Précisons les notations employées. Dans les cas des groupes symplectiques et orthogonaux, les orbites unipotentes qui interviennent dans les paires cuspidales sont paramétrées par des partitions dont les parts sont de multiplicité 1. Par suite, le groupe des composantes est un produit de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ indexé par les parts paires (resp. impaires) pour le cas symplectique (resp. orthogonal).

Dans le cas symplectique, soit $u \in \mathcal{O}_{(2d,2d-2,\dots,4,2)}$ et pour tout $a \in \{2, \dots, 2d\}$, notons $z_a \in A_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})}(u)$ tels que :

$$A_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})}(u) = \prod_{i=1}^{d} \{1, z_{2i}\} \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d.$$

La représentation cuspidale τ_{2n} de $A_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})}(u)$ vérifie pour tout $i \in [\![1, d]\!]$:

$$\tau_{2n}(z_{2i}) = (-1)^i.$$

Dans le cas orthogonal, soit $u \in \mathcal{O}_{(2d-1,2d-1,\ldots,3,1)}$ et pour tout $a \in \{1, \ldots, 2d-1\}$, notons $z_a \in A_{\mathrm{O}_n(\mathbf{C})}(u)$ tels que :

$$A_{\mathrm{O}_n(\mathbf{C})}(u) = \prod_{i=1}^{d} \{1, z_{2i-1}\} \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d, \quad A_{\mathrm{SO}_n(\mathbf{C})}(u) = \prod_{i=1}^{d-1} \{1, z_{2i-1}z_{2i+1}\} \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{d-1}.$$

La représentation cuspidale ε_n de $A_{\mathrm{SO}_n(\mathbf{C})}(u)$ vérifie pour tout $i \in [\![1, d-1]\!]$:

$$\varepsilon_n(z_{2i-1}z_{2i+1}) = -1.$$

Les représentations irréductibles ε'_n et ε''_n de $A_{\mathrm{O}_n(\mathbf{C})}(u)$ telles que leurs restrictions à $A_{\mathrm{SO}_n(\mathbf{C})}(u)$ est ε_n vérifient, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$:

$$\varepsilon'_n(z_{2i-1}) = (-1)^i,$$

$$\varepsilon''_n(z_{2i-1}) = (-1)^{i+1}.$$

La preuve de ce fait sera établie dans ce qui suit.

1.3 Équivariance de la correspondance de Springer généralisée

1.3.1 Un théorème de Lusztig-Springer-Borho-MacPherson

On se replace dans le contexte de l'article [Lus84] et on reprend, à peu de chose près, les notations de l'article original de Lusztig.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe complexe. Dans [Lus84, §3.1], Lusztig définit une partition de G en nombre fini de sous-variétés irréductibles, lisses, localement fermées et stables par conjugaison. Pour tout $g \in G$, on note g_s la partie semi-simple de g. Rappelons qu'on dit que $g \in G$ (ou sa classe de conjugaison $\mathcal{C}_g^G$) est isolé si $Z_G(g_s)^\circ$ n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi propre de G. D'après [Lus84, 2.7], si $\mathfrak{t} = [L, \mathcal{C}_v^L, \mathcal{L}] \in \mathcal{S}_G$, alors la classe $\mathcal{C}_v^L$ est isolée dans L.
Soit L un sous-groupe de Levi de G et $S \subset L$ l'image réciproque d'une classe de conjugaison isolée de L/Z_L° via la projection naturelle $L \twoheadrightarrow L/Z_L^\circ$, où Z_L° désigne la composante connexe du centre de L. Notons

$$S_{\mathrm{reg}} = \{g \in S,\ Z_G(g_s)^\circ \subset L\}.$$

Considérons alors la sous-variété irréductible, lisse et localement fermée de G définie par

$$Y_{(L,S)} = \bigcup_{g \in G} g S_{\mathrm{reg}} g^{-1} = \bigcup_{x \in S_{\mathrm{reg}}} \mathcal{C}_x^G.$$

Remarquons que $Y_{(L,S)}$ ne dépend en fait que de la G-classe de conjugaison de (L, S).
A présent, considérons $P = LU_P$ un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi L, notons $\overline{\mathbf{c}} = (P, L, S)$, $\mathbf{c} = (L, S)$ et posons

$$\widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}}} = \{(g, x) \in G \times G,\ x^{-1}gx \in \overline{S} \cdot U_P\},$$

$$X_{\overline{\mathbf{c}}} = \{(g, xP) \in G \times G/P,\ x^{-1}gx \in \overline{S} \cdot U_P\},$$

où $\overline{S}$ désigne l'adhérence de S. Le sous-groupe P agit librement par translation à droite sur la seconde coordonnée d'un élément $\widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}}}$ et $\widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}}}/P = X_{\overline{\mathbf{c}}}$. D'après [Lus84, 4.3], la projection selon la première coordonnée $\phi_{\overline{\mathbf{c}}} : X_{\overline{\mathbf{c}}} \longrightarrow G$ est propre et son image est $\overline{Y}_{\mathbf{c}}$. Enfin, $\overline{S}$ est stratifié en nombre fini de strates lisses, qui sont les orbites de $Z_L^\circ \times L$ (sur $\overline{S}$), où Z_L° agit par translation et L par conjugaison. Il y a une unique strate ouverte qui est S. Notons $\sigma_{\overline{\mathbf{c}}} : \widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}}} \longrightarrow \overline{S}$ l'application qui à (g, x) associe la projection de $x^{-1}gx \in \overline{S} \cdot U_P$ sur le facteur $\overline{S}$ et $\varpi_P : \widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}}} \longrightarrow X_{\overline{\mathbf{c}}}$ l'application définie pour tout $(g, x) \in \widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}}}$ par $\varpi_P(g, x) = (g, xP)$. Pour résumer la situation, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}}} \arrow[dl, "\sigma_{\overline{\mathbf{c}}}"'] \arrow[dr, "\varpi_P"] & \\
\overline{S} & & X_{\overline{\mathbf{c}}} \arrow[d, "\phi_{\overline{\mathbf{c}}}"] \\
 & & \overline{Y}_{\mathbf{c}}
\end{tikzcd}$$

Par image réciproque via $\sigma_{\overline{\mathbf{c}}}$, de la stratification de $\overline{S}$ on obtient une stratification de $\widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}}}$. La strate $\widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}},\alpha}$ (correspondant à la strate ouverte S) est ouverte et dense. Nous noterons $\sigma_{\overline{\mathbf{c}},\alpha}$ la restriction de $\sigma_{\overline{\mathbf{c}}}$ à $\widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}},\alpha}$ Chaque strate de $\widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}}}$ est P-invariante et leurs images dans $X_{\overline{\mathbf{c}}} = \widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}}}/P$ forment une stratification de $X_{\overline{\mathbf{c}}}$, avec $X_{\overline{\mathbf{c}},\alpha} = \widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}},\alpha}/P$ ouverte et dense.

Soit $\mathcal{E}$ un système local irréductible cuspidal L-équivariant sur S. Alors $(\sigma_{\overline{\mathbf{c}},\alpha})^*\mathcal{E}$ est un système local $G \times P$-équivariant sur $\widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}},\alpha}$. Il existe alors un unique système local G-équivariant sur $X_{\overline{\mathbf{c}},\alpha}$, noté $\overline{\mathcal{E}}$, tel que $(\sigma_{\overline{\mathbf{c}},\alpha})^*\mathcal{E} = (\varpi_P)^*\overline{\mathcal{E}}$.
Même si ce n'est pas la façon originelle dont Lusztig a défini les objets suivants (voir [Lus84, §3]), notons $\widetilde{Y}_{\mathbf{c}} = \phi_{\overline{\mathbf{c}}}^{-1}(Y_{\mathbf{c}})$, $\pi_{\mathbf{c}} = \phi_{\overline{\mathbf{c}}}|_{\widetilde{Y}_{\mathbf{c}}}$, $\widetilde{\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{E}}|_{\widetilde{Y}_{\mathbf{c}}}$ et enfin

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \operatorname{End}_{\mathcal{D}Y_{\mathbf{c}}}((\pi_{\mathbf{c}})_*\widetilde{\mathcal{E}}) \simeq \operatorname{End}_{\mathcal{D}_G Y_{\mathbf{c}}}((\pi_{\mathbf{c}})_*\widetilde{\mathcal{E}}),$$

où $\mathcal{D}Y_{\mathbf{c}}$ (resp. $\mathcal{D}_G Y_{\mathbf{c}}$) désigne la catégorie dérivée bornée des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux constructibles (resp. G-équivariant) sur $Y_{\mathbf{c}}$. Nous noterons $\mathbf{Irr}(\mathcal{A}_{\mathcal{E}})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$-modules simples et $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ le faisceau constant.
Soit $K_{\overline{\mathbf{c}}} = \mathrm{IC}(X_{\overline{\mathbf{c}}}, \overline{\mathcal{E}})$ le complexe de cohomologie d'intersection de Deligne-Goresky-MacPherson de $X_{\overline{\mathbf{c}}}$ à coefficient dans $\overline{\mathcal{E}}$. Alors $(\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_! K_{\overline{\mathbf{c}}}$ est un complexe sur $\overline{Y}_{\mathbf{c}}$.

Théorème 1.6 (Lusztig,[Lus84, 6.5])**.** *Soient* $\mathfrak{t} = [L, \mathcal{C}_v^L, \mathcal{L}] \in \mathcal{S}_G$, $(S, \mathcal{E}) = (Z_L^\circ \cdot \mathcal{C}_v^L, \overline{\mathbf{Q}}_\ell \boxtimes \mathcal{L})$ *la paire cuspidale correspondante pour* L, *et* P *un sous-groupe parabolique de* G *de Levi* L. *Comme précédemment, notons* $\overline{\mathbf{c}} = (P, L, S)$, $\mathbf{c} = (L, S)$ *et* $(\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_! K_{\overline{\mathbf{c}}}$ *le complexe correspondant sur* $\overline{Y}_{\mathbf{c}}$.

(a) Pour $(\mathcal{C}_u^G, \mathcal{F}) \in \mathcal{N}_G^+$, *on a* $\Psi_G(\mathcal{C}_u^G, \mathcal{F}) = (L, \mathcal{C}_v^L, \mathcal{L})$, *si et seulement si, les deux conditions suivantes vérifiées :*

(i) $\mathcal{C}_u^G \subseteq \overline{Y}_{\mathbf{c}}$ *;*

(ii) $\mathcal{F}$ *est un facteur direct de* $R^{2d_{\mathcal{C}_u^G, \mathcal{C}_v^L}}(f_{\overline{\mathbf{c}}})_!(\overline{\mathcal{E}})\big|_{\mathcal{C}_u^G}$, *où* $f_{\overline{\mathbf{c}}}$ *est la restriction de* $\phi_{\overline{\mathbf{c}}}$ *à* $X_{\overline{\mathbf{c}},\alpha} \subset X_{\overline{\mathbf{c}}}$ *et* $d_{\mathcal{C}_u^G, \mathcal{C}_v^L} = (\nu_G - \frac{1}{2}\dim \mathcal{C}_u^G) - (\nu_L - \frac{1}{2}\dim \mathcal{C}_v^L)$, *où* ν_G *(resp.* ν_L*) est le nombre de racines positives de* G *(resp. de* L*).*

(b) *Le morphisme naturel*

$$R^{2d_{\mathcal{C}_u^G,\mathcal{C}_v^L}}(f_{\overline{\mathbf{c}}})_!(\overline{\mathcal{E}})\big|_{\mathcal{C}_u^G} \longrightarrow \mathcal{H}^{2d_{\mathcal{C}_u^G,\mathcal{C}_v^L}}((\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}})\big|_{\mathcal{C}_u^G}$$

donnée par l'inclusion de $X_{\overline{\mathbf{c}},\alpha}$ dans $X_{\overline{\mathbf{c}}}$ en tant qu'ouvert, est un isomorphisme

(c) *Pour tout $\rho \in \mathbf{Irr}(\mathcal{A}_{\mathcal{E}})$, soit $((\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}})_\rho$ la composante ρ-isotypique de $(\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}}$, c'est-à-dire*

$$(\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}} = \bigoplus_{\rho\in\mathbf{Irr}(\mathcal{A}_{\mathcal{E}})} \rho \boxtimes ((\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}})_\rho.$$

Soit $\overline{Y}_{\mathbf{c},\mathrm{uni}}$ la variété des éléments unipotents dans $\overline{Y}_{\mathbf{c}}$. Il existe un unique couple $(\mathcal{C}_u^G, \mathcal{F}) \in \mathcal{N}_G^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{C}_u^G \subset \overline{Y}_{\mathbf{c}}$

(ii) $((\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}})_\rho|_{\overline{Y}_{\mathbf{c},\mathrm{uni}}}$ *est isomorphe à* $\mathrm{IC}(\overline{\mathcal{C}_u^G}, \mathcal{F})[2d_{\mathcal{C}_u^G,\mathcal{C}_v^L}]$ *prolongé par* 0 *sur* $\overline{Y}_{\mathbf{c},\mathrm{uni}} - \overline{\mathcal{C}_u^G}$.

En particulier, $\mathcal{F} = \mathcal{H}^{2d_{\mathcal{C}_u^G,\mathcal{C}_v^L}}(((\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}})_\rho)\big|_{\mathcal{C}_u^G}$. L'application $\Sigma_G : \mathcal{A}_{\mathcal{E}}^\vee \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathfrak{t}}$ qui à ρ associe $(\mathcal{C}_u^G, \mathcal{F})$ est une bijection.

Remarque 1.7. D'après [Lus84, 9.2], il y a un unique isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \simeq \overline{\mathbf{Q}}_\ell[W_{\mathfrak{t}}],$$

tel que les propriétés rappelées dans la remarque 1.5 soient vérifiées.

1.3.2 H-équivariance de la correspondance de Springer pour H°

Soit H un groupe algébrique linéaire complexe, réductif et non nécessairement connexe. Le groupe H agit par conjugaison sur $\mathcal{N}_{H^\circ}^+$, $\mathcal{S}_{H^\circ}$. En effet, soit $h \in H$, $(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \mathcal{F}) \in \mathcal{N}_{H^\circ}^+$, $\mathfrak{t} = [L, \mathcal{C}_v^L, \mathcal{L}]_{H^\circ} \in \mathcal{S}_{H^\circ}$ et $\rho \in \mathbf{Irr}(W_{\mathfrak{t}})$.
Puisque H° est distingué dans H, ${}^h\mathcal{C}_u^{H^\circ} = \mathcal{C}_{huh^{-1}}^{hH^\circ h^{-1}} = \mathcal{C}_{huh^{-1}}^{H^\circ}$ est une orbite unipotente de H°. De même, ${}^hL$ est un sous-groupe de Levi de H°, ${}^h\mathcal{C}_v^L$ est une orbite unipotente de ${}^hL$, etc. Abusons de la notation h pour désigner l'application

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & h^{-1}xh \end{array}$$

Ainsi, $h^*\mathcal{F}$ (resp. $h^*\mathcal{L}$) est un système local sur $\mathcal{C}_{huh^{-1}}^{H^\circ}$ (resp. ${}^h\mathcal{C}_v^L$). En gardant les notations précédentes, l'action de H sur $\mathcal{N}_{H^\circ}^+$, $\mathcal{S}_{H^\circ}$ et $\mathbf{Irr}(W)$ est la suivante :

$$h\cdot(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \mathcal{F}) = (\mathcal{C}_{huh^{-1}}^{H^\circ}, h^*\mathcal{F}), \quad h\cdot[L, \mathcal{C}_v^L, \mathcal{L}] = [{}^hL, \mathcal{C}_{hvh^{-1}}^{{}^hL}, h^*\mathcal{L}] \quad \text{et} \quad h\cdot\rho = \rho^h \in \mathbf{Irr}(W_{h\cdot\mathfrak{t}}).$$

Théorème 1.8. *La correspondance de Springer pour H° est H-équivariante. Plus précisément, pour tout $h \in H$ le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Irr}(W_{\mathfrak{t}}) \arrow[d, "h"] & \mathcal{N}_{H^\circ}^+ \arrow[l, "\Sigma_{H^\circ}"'] \arrow[r, "\Psi_{H^\circ}"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{S}_{H^\circ}^+ \arrow[d, "h"] \\ \mathbf{Irr}(W_{h\cdot\mathfrak{t}}) & \mathcal{N}_{H^\circ}^+ \arrow[l, "\Sigma_{H^\circ}"'] \arrow[r, "\Psi_{H^\circ}"] & \mathcal{N}_{H^\circ}^+ \end{tikzcd}$$

Autrement dit, pour tout $h \in H$, $(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \mathcal{F}) \in \mathcal{N}_{H^\circ}^+$,

$$\Psi_{H^\circ}(h\cdot(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \mathcal{F})) = h\cdot\Psi_{H^\circ}(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \mathcal{F}) \quad \textit{et} \quad \Sigma_{H^\circ}(h\cdot(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \mathcal{F})) = h\cdot\Sigma_{H^\circ}(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \mathcal{F}).$$

Démonstration. Notons $G = H^\circ$ et reprenons les notations du théorème 1.6. Soient $h \in H$, $(\mathcal{C}_u^G, \mathcal{F}) \in \mathcal{N}_G^+$, P un sous-groupe parabolique de G, de facteur de Levi L, $v \in L$ un élément unipotent et $\mathcal{L}$ un système local irréductible cuspidal L-équivariant sur $\mathcal{C}_v^L$ tel que $\Psi_G(\mathcal{C}_u^G, \mathcal{F}) = [L, \mathcal{C}_v^L, \mathcal{L}] \in \mathcal{S}_G$. Comme dans le théorème 1.6, notons $(S, \mathcal{E}) = (Z_L^\circ \cdot \mathcal{C}_v^L, \overline{\mathbf{Q}}_\ell \boxtimes \mathcal{L})$ la paire cuspidale correspondante pour L et $\overline{\mathbf{c}} = (P, L, S)$, $\mathbf{c} = (L, S)$. D'après (a) du théorème 1.6, $\mathcal{C}_u^G \subset \overline{Y}_{\mathbf{c}}$, donc ${}^h\mathcal{C}_u^G \subset {}^h\overline{Y}_{\mathbf{c}} = \overline{Y}_{h\cdot\mathbf{c}}$, où $h \cdot \mathbf{c} = ({}^hL, {}^hS)$. Considérons les applications

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X}_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}} & \longrightarrow & \widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}}} \\ (g,x) & \longmapsto & ({}^{h^{-1}}g, {}^{h^{-1}}x) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} X_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}} & \longrightarrow & X_{\overline{\mathbf{c}}} \\ (g, x\,{}^hP) & \longmapsto & ({}^{h^{-1}}g, {}^{h^{-1}}xP) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & {}^{h^{-1}}g \end{array}.$$

et les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} \widehat{X}_{h\cdot\overline{\mathbf{c}},\alpha} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma_{h\cdot\overline{\mathbf{c}},\alpha}"] & \widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}},\alpha} \arrow[d, "\sigma_{\overline{\mathbf{c}},\alpha}"] \\ {}^hS \arrow[r, "h"] & S \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \widehat{X}_{h\cdot\overline{\mathbf{c}},\alpha} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varpi_{{}^hP}"] & \widehat{X}_{\overline{\mathbf{c}},\alpha} \arrow[d, "\varpi_P"] \\ X_{h\cdot\overline{\mathbf{c}},\alpha} \arrow[r, "h"] & X_{\overline{\mathbf{c}},\alpha} \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} X_{h\cdot\overline{\mathbf{c}},\alpha} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}}"] & X_{\overline{\mathbf{c}},\alpha} \arrow[d, "f_{\overline{\mathbf{c}}}"] \\ \overline{Y}_{h\cdot\mathbf{c}} \arrow[r, "h"] & \overline{Y}_{\mathbf{c}} \end{tikzcd}.$$

Les deux premiers diagrammes commutatifs montrent que

$$\begin{aligned} (\sigma_{h\cdot\overline{\mathbf{c}},\alpha})^*(h^*\mathcal{E}) &= h^*(\sigma_{\overline{\mathbf{c}},\alpha})^*(\mathcal{E}) \\ &= h^*(\varpi_P)^*(\overline{\mathcal{E}}) \\ &= (\varpi_{{}^hP})^*(h^*\overline{\mathcal{E}}) \end{aligned}$$

Par unicité, ceci montre que $h^*\overline{\mathcal{E}} = \overline{h^*\mathcal{E}}$. Le troisième diagramme cartésien montre par le théorème de changement de base propre, qu'on a

$$h^* R^{2d}(f_{\overline{\mathbf{c}}})_!(\overline{\mathcal{E}}) \simeq R^{2d}(f_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}})_!(h^*\overline{\mathcal{E}}) = R^{2d}(f_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}})(\overline{h^*\mathcal{E}}).$$

Puisque

$$\begin{aligned} 0 \neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{C}_u^G}(\mathcal{F}, R^{2d}(f_{\overline{\mathbf{c}}})_!(\overline{\mathcal{E}})|_{\mathcal{C}_u^G}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}{}^h\mathcal{C}_u^G}(h^*\mathcal{F}, h^*R^{2d}(f_{\overline{\mathbf{c}}})_!(\overline{\mathcal{E}})|_{{}^h\mathcal{C}_u^G}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}{}^h\mathcal{C}_u^G}(h^*\mathcal{F}, R^{2d}(f_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}})_!(\overline{h^*\mathcal{E}})|_{{}^h\mathcal{C}_u^G}) \neq 0, \end{aligned}$$

avec $d = d_{\mathcal{C}_u^G, \mathcal{C}_v^L} = d_{{}^h\mathcal{C}_u^G, {}^h\mathcal{C}_v^L}$. Ainsi $h^*\mathcal{F}$ est un facteur direct de $R^{2d}(f_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}})_!(\overline{h^*\mathcal{E}})|_{{}^h\mathcal{C}_u^G}$ et d'après le théorème 1.6, Φ_{H° est H-équivariante.

D'après [GM83, prop. 5.4], on a $h^*K_{\overline{\mathbf{c}}} = h^*\mathrm{IC}(X_{\overline{\mathbf{c}}}, \overline{\mathcal{E}}) = \mathrm{IC}(h^*X_{\overline{\mathbf{c}}}, h^*\overline{\mathcal{E}}) = \mathrm{IC}(X_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}}, \overline{h^*\mathcal{E}}) = K_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}}$. Soit $\rho \in \mathbf{Irr}(\mathcal{A}_{\mathcal{E}})$. Par fonctorialité, $\mathcal{A}_{h^*\mathcal{E}} \simeq \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ et en considérant le dernier des trois diagrammes commutatifs, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{E}}}(\rho, (\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{h^*\mathcal{E}}}(h^*\rho, h^*(\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{h^*\mathcal{E}}}(\rho^h, (\phi_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}})_!K_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}}) \\ h^*((\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}})_\rho &\simeq ((\phi_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}})_!K_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}})_{h^*\rho} \end{aligned}$$

Puisque $((\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}})_\rho|_{\overline{Y}_{\mathbf{c},\mathrm{uni}}} \simeq \mathrm{IC}(\overline{\mathcal{C}_u^G}, \mathcal{F})[2d_{\mathcal{C}_u^G, \mathcal{C}_v^L}]$, on obtient

$$h^*((\phi_{\overline{\mathbf{c}}})_!K_{\overline{\mathbf{c}}})_\rho|_{\overline{Y}_{\mathbf{c},\mathrm{uni}}} \simeq h^*\mathrm{IC}(\overline{\mathcal{C}_u^G}, \mathcal{F})[2d_{\mathcal{C}_u^G, \mathcal{C}_v^L}]$$

$$((\phi_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}})_!K_{h\cdot\overline{\mathbf{c}}})_{h^*\rho} \simeq \mathrm{IC}(\overline{{}^h\mathcal{C}_u^G}, h^*\mathcal{F})[2d_{{}^h\mathcal{C}_u^G, {}^h\mathcal{C}_v^L}]$$

D'après la caractérisation (c) du théorème, ceci montre que Σ_{H° est H-équivariante.

$\square$

1.4 Correspondance de Springer généralisée pour le groupe orthogonal

1.4.1 Correspondance de Springer généralisée pour le groupe orthogonal

Nous avons vu précédemment que la correspondance de Springer généralisée pour un groupe réductif connexe G établit une bijection (à G-conjugaison près)

$$\Sigma : (\mathcal{O}, \eta) \longmapsto (L, \mathcal{C}, \varepsilon, \rho),$$

avec

— $\mathcal{O}$ une orbite unipotente de G ;

— η une représentation irréductible de $A_G(u)$ (et $u \in \mathcal{O}$) ;

— L un sous-groupe de Levi de G ;

— $\mathcal{C}$ une orbite unipotente de L ;

— ε une représentation irréductible **cuspidale** de $A_L(v)$ (et $v \in \mathcal{C}$) ;

— ρ une représentation irréductible de $N_G(L)/L$.

Nous souhaitons étendre cette bijection au groupe orthogonal. Pour cela, précisons quels objets seront en bijection et décrivons notre démarche.

Définition 1.9. Soit H un groupe réductif non nécessairement connexe, $A \subset H$ un tore et $L = Z_H(A)$. On appelle sous-groupe de quasi-Levi de H, le centralisateur dans H d'un tore contenu dans H. Le groupe de Weyl de L dans H est $W_L^H = N_H(A)/Z_H(A)$.

Remarque 1.10. Soit $A \subset H$ un tore contenu dans H et $L = Z_H(A)$ un sous-groupe de quasi-Levi de H. Alors, $L^\circ = Z_H(A)^\circ = Z_{H^\circ}(A)^\circ = Z_{H^\circ}(A)$ est un sous-groupe de Levi de H°. Réciproquement, tout sous-groupe de Levi de H° est la composante neutre d'un sous-groupe de quasi-Levi de H. De plus, le groupe de Weyl de L° dans H°, $W_{L^\circ}^{H^\circ} = N_{H^\circ}(A)/Z_{H^\circ}(A)$ est un sous-groupe distingué de W_L^H.

Décrivons les sous-groupes de quasi-Levi du groupe orthogonal et leurs groupes de Weyl relatifs.

H	L°	L	L/L°	$W_L^H/W_{L^\circ}^{H^\circ}$	
O_{2n+1}	$\prod_{i=1}^k \mathrm{GL}_{n_i} \times \mathrm{SO}_{2n'+1}$	$\prod_{i=1}^k \mathrm{GL}_{n_i} \times \mathrm{O}_{2n'+1}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\{1\}$	$n_i \geqslant 0, n' \geqslant 0$
O_{2n}	$\prod_{i=1}^k \mathrm{GL}_{n_i} \times \mathrm{SO}_{2n'}$	$\prod_{i=1}^k \mathrm{GL}_{n_i} \times \mathrm{O}_{2n'}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\{1\}$	$n_i \geqslant 0, n' \geqslant 2$
	$\prod_{i=1}^k \mathrm{GL}_{n_i}$	$\prod_{i=1}^k \mathrm{GL}_{n_i}$	$\{1\}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$n_i \geqslant 0$

Table 1.3: Sous-groupes de quasi-Levi du groupe orthogonal

À présent, nous nous intéressons uniquement au groupe orthogonal O_N que nous notons H.

Nous allons associer à tout couple formé d'une H-classe de conjugaison d'un élément unipotent $u \in H^\circ$ et d'une représentation irréductible de $A_H(u)$, une H-classe de conjugaison d'un quadruplet formé d'un sous-groupe de quasi-Levi L de H, d'une L-classe de conjugaison d'un élément unipotent $v \in L^\circ$, d'une représentation irréductible cuspidale de $A_L(v)$ (nous verrons plus tard quelle est la définition) et d'une représentation irréductible de W_L^H.

Pour cela nous allons procéder en trois étapes. Tout d'abord nous étendons la correspondance de Springer au sous-groupe H^L de H tel que $H^L/H^\circ = L/L^\circ$. Ensuite, nous l'étendons au sous-groupe $H^{\mathcal{O}}$ de H qui stabilise la classe de H°-conjugaison de u et enfin à H.
Le groupe des composantes du groupe orthogonal étant d'ordre 2, une seule de ces étapes apparaitra ci-dessous. Néanmoins, dans la section suivante ces trois étapes apparaitront. Commençons par décrire les représentations irréductibles de $A_H(u)$ en fonction de leurs restrictions à $A_{H^\circ}(u)$, où $u \in H^\circ$ est un élément unipotent.

Soit $u \in H^\circ$ un élément unipotent. Supposons que $A_H(u) \neq A_{H^\circ}(u)$. Dans ce cas, pour tout $s \in H \setminus H^\circ$, $s\mathcal{C}_u^{H^\circ}s^{-1} = \mathcal{C}_u^{H^\circ}$. Il existe donc $s \in H \setminus H^\circ$ tel que :

$$A_H(u) = A_{H^\circ}(u) \rtimes \{1, s\}.$$

On sait que $A_H(u)$ est un produit de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On peut donc identifier les représentations irréductibles de $A_H(u)$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A_H(u), \mathbf{C}^\times)$ et les représentations irréductibles de $A_{H^\circ}(u)$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A_{H^\circ}(u), \mathbf{C}^\times)$. Ces espaces sont des $\mathbf{F}_2$-espaces vectoriels de dimensions finies et le dernier est sous-espace du premier de codimension 1. Considérons la suite exacte de groupes abéliens :

$$1 \longrightarrow A_{H^\circ}(u) \longrightarrow A_H(u) \longrightarrow \{1, s\} \longrightarrow 1$$

On déduit une suite exacte de $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de dimension finie :

$$1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\{1, s\}, \mathbf{C}^\times) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A_H(u), \mathbf{C}^\times) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A_{H^\circ}(u), \mathbf{C}^\times) \longrightarrow 1$$

Le morphisme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A_H(u), \mathbf{C}^\times) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A_{H^\circ}(u), \mathbf{C}^\times)$ est surjectif pour des raisons de dimensions. Ainsi, tout caractère de $A_{H^\circ}(u)$ se remonte en un caractère de $A_H(u)$. Ceci signifie exactement que $\eta^s = \eta$.
Il y a exactement deux caractères de $A_H(u)$ tels que leurs restrictions au sous-groupe distingué $A_{H^\circ}(u)$ soit égal à η. Ces caractères sont $\eta \boxtimes 1$ et $\eta \boxtimes \xi$, avec ξ le caractère non trivial de $\{1, s\}$.

Soit $(u, \eta) \in \mathcal{N}_{\mathrm{SO}_N}^+$. Notons $(L^\circ, \mathcal{C}_v^{L^\circ}, \varepsilon, \rho)$ les objets associés à (u, η) par la correspondance de Springer généralisée pour SO_N.

(I) Supposons (N est impair) ou (N est pair et $L = (\mathbf{C}^\times)^\ell \times \mathrm{O}_{N'}$ avec $N' \geqslant 4$).
Dans ce cas, pour tout $s \in H \setminus H^\circ, s\mathcal{C}_u^{H^\circ}s^{-1} = \mathcal{C}_u^{H^\circ}$ et pour tout $s' \in L \setminus L^\circ, s'\mathcal{C}_v^{L^\circ}s'^{-1} = \mathcal{C}_v^{L^\circ}$.
Il existe donc $s \in H \setminus H^\circ$ et $s' \in L \setminus L^\circ$ tels que :

$$A_H(u) = A_{H^\circ}(u) \rtimes \{1, s\} \quad \text{et} \quad A_L(v) = A_{L^\circ}(v) \rtimes \{1, s'\}.$$

Toute représentation irréductible de $A_H(u)$ de restriction η à $A_{H^\circ}(u)$ est de la forme $\eta \boxtimes \chi$, avec χ une représentation irréductible de $\{1, s\}$. De même, toute représentation irréductible de $A_L(v)$ de restriction ε à $A_{L^\circ}(v)$ est de la forme $\varepsilon \boxtimes \chi'$, avec χ' une représentation irréductible de $\{1, s'\}$. De plus, $W_L^H = W_{L^\circ}^{H^\circ}$.
On associe à la H-classe de conjugaison de $(\mathcal{C}_u^H, \eta \boxtimes \chi)$, la H-classe de conjugaison du quadruplet $(L, \mathcal{C}_v^L, \varepsilon \boxtimes \chi, \rho)$.

(II) Supposons N pair, $L^\circ = T = (\mathbf{C}^\times)^\ell$ et que la partition associée à u contient une part paire de multiplicité impaire.

Dans ce cas, pour tout $s \in H \setminus H^\circ, s\mathcal{C}_u^{H^\circ} s^{-1} = \mathcal{C}_u^{H^\circ}$. Il existe donc $s \in H \setminus H^\circ$ et $s' \in N_H(T) \setminus \in N_{H^\circ}(T)$ tels que :

$$A_H(u) = A_{H^\circ}(u) \rtimes \{1, s\} \quad \text{et} \quad W_T^H = W_T^{H^\circ} \rtimes \{1, s'\}.$$

Puisque $s \cdot (\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \eta) = (\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \eta)$, par équivariance de la correspondance de Springer,

$$(T, \{1\}, 1, \rho) = \Sigma(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \eta) = \Sigma(s \cdot (\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \eta)) = s' \cdot \Sigma(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \eta) = (T, \{1\}, 1, \rho^{s'}).$$

Ainsi, $\rho^{s'} \simeq \rho$. Comme précédemment, toute représentation irréductible de $A_H(u)$ de restriction η à $A_{H^\circ}(u)$ est de la forme $\eta \boxtimes \chi$, avec χ une représentation irréductible de $\{1, s\}$. De même, toute représentation irréductible de W_T^H de restriction ρ à $W_T^{H^\circ}$ est de la forme $\rho \boxtimes \chi'$, avec χ' une représentation irréductible de $\{1, s'\}$.
On associe à la H-classe de conjugaison de $(\mathcal{C}_u^H, \eta \boxtimes \chi)$, la H-classe de conjugaison du quadruplet $(T, \{1\}, 1, \rho \boxtimes \chi)$.

(III) Supposons N pair et que la partition associée à u ne contient que des parts paires de multiplicités paires.
Dans ce cas, pour tout $s \in H \setminus H^\circ, s\mathcal{C}_u^{H^\circ} s^{-1} \neq \mathcal{C}_u^{H^\circ}$ et $A_H(u) = A_{H^\circ}(u) = \{1\}$. Ici, $L^\circ = T = (\mathbf{C}^\times)^\ell$ et il existe $s' \in N_H(T) \setminus \in N_{H^\circ}(T)$ tel que :

$$W_T^H = W_T^{H^\circ} \rtimes \{1, s'\}.$$

Par équivariance de la correspondance de Springer généralisée, puisque $(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \{1\}) \neq (\mathcal{C}_{s'us'^{-1}}^{H^\circ}, \{1\})$, on a : $\rho^{s'} \not\simeq \rho$. Ainsi, $\mathrm{Ind}_{W_T^{H^\circ}}^{W_T^H}(\rho)$ est irréductible et $\mathcal{C}_u^H = \mathcal{C}_u^{H^\circ} \sqcup \mathcal{C}_{s'us'^{-1}}^{H^\circ}$.
On associe à la H-classe de conjugaison de $(\mathcal{C}_u^H, 1)$, la H-classe de conjugaison du quadruplet $(T, \{1\}, 1, \mathrm{Ind}_{W_T^{H^\circ}}^{W_T^H}(\rho))$.

Définition 1.11. Soit L un sous-groupe de quasi-Levi de H, $v \in L^\circ$ un élément unipotent et $\varepsilon \in \mathbf{Irr}(A_L(v))$. On dit que ε est cuspidale, si et seulement si, la restriction de ε à $A_{L^\circ}(v)$ est une représentation cuspidale. On notera $\mathbf{Irr}(A_L(v))_{\mathrm{cusp}}$ l'ensemble des (classes de) représentations irréductibles cuspidales de $A_L(v)$.

Notons

$$\mathcal{N}_H^+ = \{(\mathcal{C}_u^H, \eta),\ u \in H^\circ \text{ unipotent}, \eta \in \mathbf{Irr}(A_H(u)\}_{/H-\mathrm{conj}},$$

$$\mathcal{S}_H = \{(L, \mathcal{C}_v^L, \varepsilon),\ L \text{ quasi-Levi de } H,\ v \in L^\circ \text{ unipotent et } \varepsilon \in \mathbf{Irr}(A_L(v))_{\mathrm{cusp}}\}_{/H-\mathrm{conj}}.$$

Pour tout $\mathfrak{t} = [L, \mathcal{C}_v^L, \tau] \in \mathcal{S}_H$, notons $W_{\mathfrak{t}} = W_L^H$.

Théorème 1.12. *Les contructions précédentes définissent une application surjective*

$$\Psi : \mathcal{N}_H^+ \longrightarrow \mathcal{S}_H,$$

induisant une décomposition

$$\mathcal{N}_H^+ = \bigsqcup_{\mathfrak{t} \in \mathcal{S}_H} \mathcal{M}_{\mathfrak{t}},$$

où $\mathcal{M}_{\mathfrak{t}} = \Psi^{-1}(\mathfrak{t})$. *De plus, pour tout* $\mathfrak{t} \in \mathcal{S}_H$, *on a une bijection*

$$\Sigma_{\mathfrak{t}} : \mathcal{M}_{\mathfrak{t}} \longrightarrow \mathbf{Irr}(W_{\mathfrak{t}}).$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}_H^+ \simeq \bigsqcup_{\mathfrak{t} \in \mathcal{S}_H} \mathbf{Irr}(W_{\mathfrak{t}}).$$

Proposition 1.13. *Soit* $(u,\eta) \in \mathcal{N}_H^+$ *et* $(L,v,\varepsilon) = \Psi(u,\eta)$. *On a des morphismes* $Z_H \longrightarrow A_H(u)$ *et* $Z_L \longrightarrow A_L(v)$. *Alors* $\eta(-1) = \varepsilon(-1)$ *(où l'on voit* -1 *à travers les morphismes précédents).*

Démonstration. Dans le (I), on peut écrire $\eta = \eta_0 \boxtimes \chi$ et $\varepsilon = \varepsilon_0 \boxtimes \chi$, avec $\eta_0 \in \mathbf{Irr}(A_{H^\circ}(u))$ et $\varepsilon_0 \in \mathbf{Irr}(A_{L^\circ}(v))$.
Supposons N pair. Dans ce cas, $-1 \in H^\circ$. D'après, [Lus95a, 5.23], $\eta_0(-1) = \varepsilon_0(-1)$, d'où $\eta(-1) = \varepsilon(-1)$.
Supposons N impair. Dans ce cas, $-1 \in A_H(u) \setminus A_{H^\circ}(u)$. Donc, $\eta(-1) = \chi(-1) = \varepsilon(-1)$.
Dans les cas (II) et (III), on conclue de la même façon. □

Remarque 1.14. On remarque d'après la forme des représentations cuspidales de $A_L(v)$, que pour tout $w \in W_L^H$ et toute représentation irréductible cuspidale ε de $A_L(v)$, $\varepsilon^w \simeq \varepsilon$.

1.4.2 Un sous-groupe d'indice deux d'un produit de groupes orthogonaux

Soit $r \geqslant 2$ un entier, $m_1, \ldots, m_r \geqslant 1$ des entiers. Considérons $H = \prod_{i=1}^r \mathrm{O}_{m_i}$ et

$$\widetilde{H} = \left\{ (x_i) \in H,\ \prod_{i=1}^r \det(x_i) = 1 \right\}.$$

Soit $u \in H^\circ$ un élément unipotent et $\eta_\circ$ une représentation irréductible de $A_{H^\circ}(u)$. On a une décomposition de

$$u = (u_i) \in \prod_{i=1}^r \mathrm{SO}_{m_i},$$

$$A_{H^\circ}(u) = \prod_{i=1}^r A_{\mathrm{SO}_{m_i}}(u_i),$$

et

$$\eta_\circ = \eta_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \eta_r,$$

avec pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, η_i une représentation irréductible de $A_{\mathrm{SO}_{m_i}}(u_i)$. On peut supposer avoir arrangé les indices de la façon suivante :

— pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, m_i est impair ou (u_i,σ_i) est associé par la correspondance de Springer généralisée à un sous-groupe de Levi de la forme $(\mathbf{C}^\times)^{\ell_i} \times \mathrm{SO}_{m_i'}$ avec $m_i' \geqslant 4$;

— pour tout $i \in [\![p+1,q]\!]$, la partition associé à u_i contient une part paire de multiplicité impaire ;

— pour tout $i \in [\![q+1,r]\!]$, la partition associé à u_i ne contient que des parts paires de multiplicités paires.

Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, notons $H_i = \mathrm{O}_{m_i}$, et ajoutons un indice i aux objets que nous avons dans la section précédente (L_i le sous-groupe de quasi-Levi de H_i associé à $(\mathcal{C}_{u_i}^{H_i}, \eta_i \boxtimes \chi_i)$, s_i, s_i', etc).
Si $p = 0$, notons

$$C_{\widetilde{L}} = \{1\},\ C_{\mathcal{O}} = \langle s_{p+1}s_{p+2}, \ldots, s_{q-1}s_q \rangle\,,\ C_I = \langle s_q s_{q+1}, \ldots, s_{r-1}s_r \rangle\,,$$
$$C'_{\widetilde{L}} = \{1\},\ C'_{\mathcal{O}} = \left\langle s'_{p+1}s'_{p+2}, \ldots, s'_{q-1}s'_q \right\rangle,\ C'_I = \left\langle s'_q s'_{q+1}, \ldots, s'_{r-1}s'_r \right\rangle.$$

Si $p \geqslant 2$, notons

$$C_{\widetilde{L}} = \langle s_1 s_2, \ldots, s_{p-1} s_p \rangle\,,\ C_{\mathcal{O}} = \langle s_p s_{p+1}, s_p s_{p+2} \ldots, s_p s_q \rangle\,,\ C_I = \langle s_p s_{q+1}, \ldots, s_p s_r \rangle\,,$$
$$C'_{\widetilde{L}} = \left\langle s'_1 s'_2, \ldots, s'_{p-1} s'_p \right\rangle,\ C'_{\mathcal{O}} = \left\langle s'_p s'_{p+1}, s'_p s'_{p+2}, \ldots, s'_p s'_q \right\rangle,\ C'_I = \left\langle s'_p s'_{q+1}, \ldots, s'_p s'_r \right\rangle.$$

Et dans chacun de ces deux cas, notons

$$\widetilde{H}^{\widetilde{L}} = H^\circ \rtimes C_{\widetilde{L}},\ \widetilde{H}^{\mathcal{O}} = H^\circ \rtimes (C_{\widetilde{L}} \times C_{\mathcal{O}}),\ \widetilde{H} = H^\circ \rtimes (C_{\widetilde{L}} \times C_{\mathcal{O}} \times C_I),\ \widetilde{L} = \widetilde{H} \cap \prod_{i=1}^{r} L_i.$$

Remarque 1.15. La façon dont on a défini ces groupe suppose que l'on a $p \geqslant 2$, $q - p \geqslant 2$, $r - q \geqslant 2$ pour $C_{\widetilde{L}}$, $C_{\mathcal{O}}$, C_I respectivement. Si ce n'est pas le cas, alors le groupe considéré est trivial.

On vérifie que

$$A_{\widetilde{H}^{\widetilde{L}}}(u) = A_{H^\circ}(u) \rtimes C_{\widetilde{L}},$$
$$A_{\widetilde{L}}(v) = A_{L^\circ}(v) \rtimes C'_{\widetilde{L}},$$
$$A_{\widetilde{H}}(u) = A_{H^\circ}(u) \rtimes \left(C_{\widetilde{L}} \times C_{\mathcal{O}}\right) \simeq A_{\widetilde{H}^{\widetilde{L}}}(u) \rtimes C_{\mathcal{O}},$$
$$W_{\widetilde{L}}^{\widetilde{H}^{\mathcal{O}}} = W_{L^\circ}^{H^\circ} \rtimes C'_{\mathcal{O}},$$
$$W_{\widetilde{L}}^{\widetilde{H}} = W_{L^\circ}^{H^\circ} \rtimes (C'_{\mathcal{O}} \times C'_I)\,.$$

On construit la correspondance de Springer généralisée pour $\widetilde{H}$ par étapes de la façon suivante :

H°	$\left(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \eta_\circ\right)$	$\left(L^\circ, \mathcal{C}_v^{L^\circ}, \varepsilon, \rho\right)$
$\widetilde{H}^{\widetilde{L}}$	$\left(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \eta_\circ \boxtimes \chi_{\widetilde{L}}\right)$	$\left(\widetilde{L}, \mathcal{C}_v^{L^\circ}, \varepsilon \boxtimes \chi_{\widetilde{L}}, \rho\right)$
$\widetilde{H}^{\mathcal{O}}$	$\left(\mathcal{C}_u^{H^\circ}, \eta_\circ \boxtimes \chi_{\widetilde{L}} \boxtimes \chi_{\mathcal{O}}\right)$	$\left(\widetilde{L}, \mathcal{C}_v^{L^\circ}, \varepsilon \boxtimes \chi_{\widetilde{L}}, \rho \boxtimes \chi_{\mathcal{O}}\right)$
$\widetilde{H}$	$\left(\mathcal{C}_u^{\widetilde{H}}, \eta_\circ \boxtimes \chi_{\widetilde{L}} \boxtimes \chi_{\mathcal{O}}\right)$	$\left(\widetilde{L}, \mathcal{C}_v^{L^\circ}, \varepsilon \boxtimes \chi_{\widetilde{L}}, \mathrm{Ind}_{W_{\widetilde{L}}^{\widetilde{H}^{\mathcal{O}}}}^{W_{\widetilde{L}}^{\widetilde{H}}} (\rho \boxtimes \chi_{\mathcal{O}})\right)$

Dans la définition 1.11 et le théorème 1.12 H désigne un groupe orthogonal. La définition 1.11 a toujours un sens en remplaçant H par $\widetilde{H}$. De plus, les constructions précédentes assurent que le théorème 1.12 est vraie en remplaçant H par $\widetilde{H}$.

Théorème 1.16. *Les contructions précédentes définissent une application surjective*

$$\Psi : \mathcal{N}_{\widetilde{H}}^{+} \longrightarrow \mathcal{S}_{\widetilde{H}},$$

induisant une décomposition

$$\mathcal{N}_{\widetilde{H}}^{+} = \bigsqcup_{\mathfrak{t} \in \mathcal{S}_{\widetilde{H}}} \mathcal{M}_{\mathfrak{t}},$$

où $\mathcal{M}_{\mathfrak{t}} = \Psi^{-1}(\mathfrak{t})$. *De plus, pour tout* $\mathfrak{t} \in \mathcal{S}_{\widetilde{H}}$, *on a une bijection*

$$\Sigma_{\mathfrak{t}} : \mathcal{M}_{\mathfrak{t}} \longrightarrow \mathbf{Irr}(W_{\mathfrak{t}}).$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}^{+}_{\widetilde{H}} \simeq \bigsqcup_{\mathfrak{t} \in \mathcal{S}_{\widetilde{H}}} \mathbf{Irr}(W_{\mathfrak{t}}).$$

Chapitre 2

Correspondance de Langlands locale

2.1 Correspondance de Langlands locale

Soit F un corps local non archimédien, $v_F : F \twoheadrightarrow \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ sa valuation discrète, q le cardinal de son corps résiduel.
Soit G un groupe réductif connexe sur F (c'est-à-dire les F-points d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur F). Notons $\mathrm{Rep}(G)$ la catégorie des représentations (complexes) lisses de G, $\mathbf{Irr}(G)$ l'ensemble (des classes) des représentations lisses irréductibles de G et $\widehat{G}$ le dual de Langlands de G. C'est un groupe réductif connexe complexe dont les données radicielles sont duales de celles de G. On note W_F le groupe de Weil de F, I_F le groupe d'inertie, $W'_F = W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ le groupe de Weil-Deligne et ${}^LG = \widehat{G} \rtimes W_F$ le L-groupe de G (voir [Bor79] et [Kot84, §1]).

La correspondance de Langlands locale prévoit un paramétrage des représentations irréductibles admissibles de G par certaines représentations du groupe de Weil-Deligne ou plus précisément, par des paramètres de Langlands. Un paramètre de Langlands est un morphisme continu $\phi : W'_F \longrightarrow {}^LG$ tel que

— la restriction $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})} : \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \longrightarrow \widehat{G}$ est un morphisme algébrique

— l'ensemble $\phi(W_F)$ est constitué d'éléments semi-simples

— le diagramme suivant est commutatif
$$\begin{tikzcd} W'_F \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\mathbf{pr}_{W'_F}"'] & & {}^LG \arrow[dl, "\mathbf{pr}_{{}^LG}"] \\ & W_F & \end{tikzcd}$$
où $\mathbf{pr}_{W'_F}$ et $\mathbf{pr}_{{}^LG}$, sont les projections naturelles sur W_F

— ϕ est pertinent (ou *relevant* en anglais), dans le sens où si $\mathrm{Im}\,\phi$ est contenu dans un sous-groupe de Levi $\mathcal{M}$ de ${}^LG$, alors il existe un sous-groupe de Levi M de G défini sur F dont le L-groupe est $\mathcal{M}$.

Remarque 2.1. Dans le cas où G est un groupe quasi-déployé, la dernière condition est automatiquement vérifiée. De plus, si G est déployé, alors ${}^LG = G \times W_F$ et l'avant dernière condition est aussi automatiquement vérifiée.

Notons $\Phi(G)$ l'ensemble des classes de paramètres de Langlands de G, à $\widehat{G}$-conjugaison près. La correspondance de Langlands locale prédit alors une surjection à fibres finies
$$\mathrm{rec}_G : \mathbf{Irr}(G) \longrightarrow \Phi(G).$$

Notons $\mathbf{a}_F : W_F \longrightarrow F^\times$ l'application de réciprocité d'Artin [BH06, §29]. Ce résultat fondamental de la théorie du corps de classes local induit un isomorphisme topologique $W_F^{\mathrm{ab}} \simeq F^\times$. Si T est un tore déployé sur F, en notant $X^*(T)$ (resp. $X_*(T)$) le groupe des caractères (resp. cocaractères) rationnels de T, on a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(T, \mathbf{C}^\times) &= \mathrm{Hom}(X_*(T) \otimes_{\mathbf{Z}} F^\times, \mathbf{C}^\times) \\ &= \mathrm{Hom}(F^\times, X^*(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}^\times) \\ &= \mathrm{Hom}(W_F, \widehat{T}).\end{aligned}$$

On a donc une bijection entre les représentations lisses irréductibles de T et les morphismes continus du groupe de Weil de F à valeurs dans $\widehat{T}$

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{rec}_T : & \mathrm{Hom}(T, \mathbf{C}^\times) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(W_F, \widehat{T}) \\ & \chi & \mapsto & \widehat{\chi}\end{array},$$

vérifiant pour tout $\gamma \in X_*(T) = X^*(\widehat{T})$ et $w \in W_F$,

$$\gamma(\widehat{\chi}(w)) = \chi(\gamma(\mathbf{a}_F(w))).$$

Plus généralement, c'est-à-dire dans le cas non-déployé, la correspondance de Langlands pour les tores et les caractères a été établie par Langlands dans [Lan97]. Pour G un groupe réductif connexe défini sur un corps local, il s'agit d'une bijection entre les caractères de G et les 1-cocycles continus du groupe de Weil de F à valeurs dans le centre de $\widehat{G}$: $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^\times) \simeq H^1(W_F, Z_{\widehat{G}})$ (voir aussi [Kal12, 4.5.2]).
Soit $\phi \in \Phi(G)$ un paramètre de Langlands de G. Notons $\Pi_\phi(G)$ le L-paquet défini par ϕ, c'est-à-dire l'ensemble des représentations irréductibles admissibles de G ayant pour image ϕ par rec_G. Conjecturalement, $\Pi_\phi(G)$ serait paramétré grosso modo par les représentations irréductibles du groupe des composantes du centralisateur dans $\widehat{G}$ de l'image de ϕ. Plus rigoureusement, considérons $Z_{\widehat{G}}(\phi)$ le centralisateur dans $\widehat{G}$ de l'image de ϕ. Notons

— $\Gamma_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ le groupe de Galois absolu de F ;
— $A_{\widehat{G}}(\phi) = \pi_0(Z_{\widehat{G}}(\phi)) \simeq Z_{\widehat{G}}(\phi)/Z_{\widehat{G}}(\phi)^\circ$, le groupe des composantes de $Z_{\widehat{G}}(\phi)$;
— $\mathcal{S}_\phi^G = \pi_0(Z_{\widehat{G}}(\phi)/Z_{\widehat{G}}^{\Gamma_F}) \simeq Z_{\widehat{G}}(\phi)/\left(Z_{\widehat{G}}^{\Gamma_F} \cdot Z_{\widehat{G}}(\phi)^\circ\right)$, le groupe des composantes de $Z_{\widehat{G}}(\phi)/Z_{\widehat{G}}^{\Gamma_F}$;
— $\mathbf{Irr}(G)_{\mathrm{cusp}}$ l'ensemble des (classes de) représentations irréductibles cuspidales de G ;
— $\mathbf{Irr}(G)_2$ l'ensemble des (classes de) représentations irréductibles essentiellement de carré intégrable de G ;
— $\mathbf{Irr}(G)_{\mathrm{temp}}$ l'ensemble des (classes de) représentations irréductibles tempérées G ;
— $\Phi(G)_2$ l'ensemble des (classes de) paramètres discrets de G, c'est-à-dire les paramètres de Langlands dont l'image n'est contenue dans aucun sous-groupe Levi propre de $\widehat{G}$;
— $\Phi(G)_{\mathrm{bdd}}$ l'ensemble des (classes de) paramètres de Langlands tels que l'image de W_F est bornée.

Dans ce qui suit, on supposera G déployé et on considèrera un paramètre de Langlands comme un morphisme continu du groupe de Weil-Deligne à valeurs dans $\widehat{G}$ et vérifiant les deux premières conditions. De plus, nous noterons $\Phi(G)^+$ l'ensemble des paramètres de Langlands complets de G :

$$\Phi(G)^+ = \left\{(\phi, \eta),\ \phi \in \Phi(G),\ \eta \in \mathbf{Irr}(\mathcal{S}_\phi^G)\right\}.$$

Conjecture 2.2 (Correspondance de Langlands locale)**.** *Avec les notations précédentes (on suppose donc G déployé), il existe une surjection à fibres finies*

$$\mathrm{rec}_G : \mathbf{Irr}(G) \longrightarrow \Phi(G),$$

vérifiant les propriétés suivantes :

— *pour tout caractère χ de G et pour tout $\pi \in \mathbf{Irr}(G)$, $\mathrm{rec}_G(\pi \otimes \chi) = \mathrm{rec}_G(\pi)\widehat{\chi}$;*

— *pour tout $\phi \in \Phi(G)$, les conditions suivantes sont équivalentes*

  (i) un élément de $\Pi_\phi(G)$ est une représentation essentiellement de carré intégrable modulo le centre ;

  (ii) tous les éléments de $\Pi_\phi(G)$ sont des représentations essentiellement de carré intégrable modulo le centre ;

  (iii) $\phi \in \Phi(G)_2$.

— *pour tout $\phi \in \Phi(G)$, les conditions suivantes sont équivalentes*

  (i) un élément de $\Pi_\phi(G)$ est une représentation tempérée ;

  (ii) tous les éléments de $\Pi_\phi(G)$ sont des représentations tempérées ;

  (iii) $\phi \in \Phi(G)_{\mathrm{bdd}}$.

— *pour tout $\phi \in \Phi(G)$, il y a une bijection $\Pi_\phi(G) \simeq \mathbf{Irr}(\mathcal{S}_\phi^G)$. Ainsi, la correspondance de Langlands se prolonge en une bijection*

$$\mathrm{rec}_G^+ : \mathbf{Irr}(G) \longrightarrow \Phi(G)^+.$$

Ainsi, conjecturalement, un paramètre de Langlands de G discret définit un L-paquet constitué uniquement de représentations essentiellement de carré intégrable et réciproquement, une représentation essentiellement de carré intégrable est associée à un paramètre discret. On a le même phénomène concernant les représentations tempérées. En revanche, il est remarquable qu'on puisse avoir dans un L-paquet des représentations supercuspidales et des représentations non supercuspidales. La condition sur un paramètre de Langlands ϕ caractérisant la présence de supercuspidales dans le L-paquet $\Pi_\phi(G)$ a nécessairement un lien avec une condition sur $\mathbf{Irr}(\mathcal{S}_\phi^G)$. On reviendra sur ce point plus tard.

Pour toute représentation π de G, on notera $\pi^\vee$ sa contragrédiente et pour tout paramètre de Langlands ϕ de $\mathrm{GL}_n(F)$, on notera $\phi^\vee$ le paramètre défini pour tout $z \in W_F'$, par $\phi^\vee(z) = {}^t\phi(z)^{-1}$.

Théorème 2.3 (Harris et Taylor ; Henniart ; Scholze)**.** *Soit $n \geqslant 1$ et $G = \mathrm{GL}_n(F)$. Il existe une unique bijection*

$$\mathrm{rec}_G : \mathbf{Irr}(G) \longrightarrow \Phi(G),$$

vérifiant les conditions de la conjecture et les suivantes :

— *pour tout $\pi \in \mathbf{Irr}(G)$, π est supercuspidale, si et seulement si, $\mathrm{rec}_G(\pi)$ est une représentation irréductible de W_F ;*

— *pour tout $\pi \in \mathbf{Irr}(G)$, le caractère central de π correspond à $\det(\mathrm{rec}_G(\pi))$ par la théorie du corps de classes ;*

— *pour tout $\pi \in \mathbf{Irr}(G)$, $\mathrm{rec}_G(\pi^\vee) = \mathrm{rec}_G(\pi)^\vee$;*

— *pour tout $\pi \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F)), \pi' \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_{n'}(F))$ et pour tout $\psi : F \longrightarrow \mathbf{C}^\times$ non trivial, on a les égalités*

$$L(\pi \times \pi', s) = L(\mathrm{rec}_{\mathrm{GL}_n}(\pi) \otimes \mathrm{rec}_{\mathrm{GL}_{n'}}(\pi'), s),$$
$$\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi) = \varepsilon(\mathrm{rec}_{\mathrm{GL}_n}(\pi) \otimes \mathrm{rec}_{\mathrm{GL}_{n'}}(\pi'), s, \psi).$$

En général, le paramétrage conjectural des L-paquets devrait être compatible avec certaines opérations que l'on présente ci-après. Pour tout $\widehat{\chi} \in \mathrm{Hom}(W_F, Z_{\widehat{G}})$ et pour tout $g \in \widehat{G}$, on a les égalités

$$\mathcal{S}^G_{\phi\widehat{\chi}} = \mathcal{S}^G_\phi, \quad \mathcal{S}^G_{{}^g\phi} = {}^g\mathcal{S}^G_\phi.$$

Pour un sous-groupe de Levi M de G, on a une bijection entre $W^G_M = N_G(M)/M$ et $W^{\widehat{G}}_{\widehat{M}}$. On notera $\widehat{w} \in W^{\widehat{G}}_{\widehat{M}}$ l'image d'un élément $w \in W^G_M$ par cette bijection.
Soit $\phi \in \Phi(M)$ un paramètre de Langlands de M, $\varepsilon \in \mathbf{Irr}(\mathcal{S}^M_\phi)$, $\pi \in \Pi_\phi(M)$ correspondant à ε, χ un caractère de M et $w \in W^G_M$. Il est naturel de penser que la correspondance de Langlands devrait impliquer la commutativité de ce diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Irr}(M) \arrow[d, "\mathrm{rec}^+_M"] & \mathbf{Irr}(M) \arrow[l, "\cdot\otimes\chi"'] \arrow[r, ".w"] \arrow[d, "\mathrm{rec}^+_M"] & \mathbf{Irr}(M) \arrow[d, "\mathrm{rec}^+_M"] \\
\Phi(M)^+ & \Phi(M)^+ \arrow[l, "\cdot\widehat{\chi}"'] \arrow[r, "\widehat{w}."] & \Phi(M)^+
\end{tikzcd}$$

Plus précisément, $\mathrm{rec}^+_M(\pi \otimes \chi) = \mathrm{rec}^+_M(\pi)\widehat{\chi} = (\phi\widehat{\chi}, \varepsilon)$ et $\mathrm{rec}^+_M(\pi^w) = {}^{\widehat{w}}\mathrm{rec}^+_M(\pi) = ({}^{\widehat{w}}\phi, \varepsilon^{\widehat{w}})$.
À l'heure actuelle, la correspondance de Langlands locale est prouvée pour

- $\mathrm{GL}_n(F)$ avec F un corps local non archimédien de caractéristique positive par Laumon, Rapoport et Stuhler [LRS93] ;
- $\mathrm{GL}_n(F)$ avec F un corps local non archimédien de caractéristique nulle par Harris et Taylor [HT01], par Henniart [Hen00] et Scholze [Sch13] ;
- $\mathrm{SO}_{2n+1}(F)$, $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ et $\mathrm{SO}_{2n}(F)$ pour les représentations tempérées, avec F de caractéristique nulle par Arthur [Art13] ;
- les groupes unitaires sur un corps p-adique par Mok [Mok15] et les formes intérieurs des groupes unitaires par Kaletha-Minguez-Shin-White [Kal+14] ;
- Lusztig a paramétré les représentations de réduction unipotente pour les groupes simples adjoints [Lus95a] ;
- $\mathrm{GSp}_4(F)$ et $\mathrm{Sp}_4(F)$ par Gan et Takeda [GT10] en caractérisque nulle et $\mathrm{GSp}_4(F)$ par Ganapathy en caractéristique positive [Gan13].

2.2 Centralisateur de paramètres de Langlands pour les groupes classiques

Dans cette section, G désigne l'un des groupes déployés suivants $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$, $\mathrm{SO}_{2n+1}(F)$ ou $\mathrm{SO}_{2n}(F)$.

Soit $\phi : W'_F \longrightarrow \widehat{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbf{C})$ un paramètre de Langlands de G. Ainsi, ϕ est une représentation de W'_F dans un $\mathbf{C}$-espace vectoriel V de dimension N préservant une forme bilinéaire non-dégénérée ε-symétrique, c'est-à-dire symétrique si $\varepsilon = 1$ et alternée si $\varepsilon = -1$. Plus précisément :

G	$\widehat{G}$	N	ε
$\mathrm{Sp}_{2n}(F)$	$\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbf{C})$	$2n+1$	1
$\mathrm{SO}_{2n+1}(F)$	$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})$	$2n$	-1
$\mathrm{SO}_{2n}(F)$	$\mathrm{SO}_{2n}(\mathbf{C})$	$2n$	1

Notons V_ϕ l'espace vectoriel dans lequel la représentation ϕ se réalise et $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_\phi}$ la forme bilinéaire non-dégénérée ε_ϕ-symétrique pour laquelle, pour tout $x \in W'_F$, $\phi(x)$ est une isométrie. Notons $I \subset \mathbf{Irr}(W'_F)$ les sous-représentations irréductibles de ϕ et décomposons V_ϕ en composantes isotypiques

$$V_\phi = \bigoplus_{\pi\in I} V(\pi) \simeq \bigoplus_{\pi \in I} M_\pi \boxtimes V_\pi,$$

où V_π l'espace vectoriel dans lequel π se réalise, $M_\pi = \mathrm{Hom}(V_\pi, V_\phi)$ l'espace de multiplicité et $V(\pi) \simeq M_\pi \boxtimes V_\pi$ la composante isotypique de π, l'isomorphisme $M_\pi \boxtimes V_\pi \longrightarrow V(\pi)$ étant donné par $\phi \boxtimes v \mapsto \phi(v)$.
L'image de ϕ étant contenue dans le groupe des isométries de la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_\phi}$, on a un isomorphisme de représentations $\phi \simeq \phi^\vee$. Ainsi, pour tout $\pi \in I$, soit $\pi \not\simeq \pi^\vee$, et donc $\pi^\vee \in I$, soit $\pi \simeq \pi^\vee$ et l'image de π est contenue dans un groupe orthogonal ou symplectique. En effet, supposons $\pi \simeq \pi^\vee$. Le choix d'une base de V_π permet d'écrire la représentation π matriciellement par $R_\pi \in \mathrm{GL}_{d_\pi}(\mathbf{C})$, où $d_\pi = \dim V_\pi$. Ainsi, il existe $A \in \mathrm{GL}_{d_\pi}(\mathbf{C})$, tel que pour tout $x \in W'_F$,

$$AR_\pi(x)A^{-1} = {}^tR_\pi(x)^{-1}.$$

En inversant et transposant cette égalité, on obtient pour tout $x \in W'_F$,

$${}^tA^{-1}AR_\pi(x)A^{-1t}A = R_\pi(x).$$

Par irréductibilité de π, il existe $c \in \mathbf{C}^\times$ tel que ${}^tA = cA$. Ceci implique donc $c \in \{1, -1\}$. Ainsi, si $c = 1$, π est à valeur dans un groupe orthogonal et on dira que π est de type orthogonal, si $c = -1$, π est à valeur dans un groupe symplectique et on dira que π est de type symplectique. Nous noterons $I_O \subseteq I$ le sous-ensemble des représentations autoduales de type orthogonal, $I_S \subseteq I$ le sous-ensemble des représentations autoduales de type symplectique et $I_{GL} \subseteq I$ un sous-ensemble maximal de représentations qui ne sont pas autoduales tel que si $\pi \in I_{GL}$, alors $\pi^\vee \notin I_{GL}$.

On vient de voir que pour $\pi \in I_O \sqcup I_S$, l'espace V_π était muni d'une forme bilinéaire non-dégénérée ε_π-symétrique. Il existe alors une forme bilinéaire non-dégénérée $\varepsilon_\phi\varepsilon_\pi$-symétrique sur M_π telle que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V(\pi)} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{V_\pi}\langle\cdot,\cdot\rangle_{M_\pi}$. Cette forme est donc symétrique si ϕ et π sont de toutes deux orthogonales ou symplectiques, alternée si ϕ et π sont de types opposés. Ainsi,

$$V_\phi = \bigoplus_{\pi\in I_O} V_\pi \boxtimes M_\pi \bigoplus_{\pi\in I_S} V_\pi \boxtimes M_\pi \bigoplus_{\pi \in I_{GL}} (V_\pi \oplus V_\pi^\vee) \boxtimes M_\pi.$$

Tout automorphisme Z de représentations de ϕ se décompose en

$$Z = \bigoplus_{\pi\in I_O\sqcup I_S} Z_\pi \bigoplus_{\pi\in I_{GL}} Z_\pi \oplus Z_\pi^\vee,$$

où pour tout $\pi \in I$, Z_π est un automorphisme de M_π. Ainsi, se donner un automorphisme de représentantions de ϕ préservant $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_\phi}$ est équivalent à se donner un automorphisme pour chaque M_π préservant la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle_{M_\pi}$. On obtient dans chacun des cas :

$$Z_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})}(\phi) = \prod_{\pi\in I_O} \mathrm{Sp}_{m_\pi}(\mathbf{C}) \times \prod_{\pi\in I_S} \mathrm{O}_{m_\pi}(\mathbf{C}) \times \prod_{\pi\in I_{GL}} \mathrm{GL}_{m_\pi}(\mathbf{C})$$

$$Z_{\mathrm{O}_N(\mathbf{C})}(\phi) = \prod_{\pi\in I_O} \mathrm{O}_{m_\pi}(\mathbf{C}) \times \prod_{\pi\in I_S} \mathrm{Sp}_{m_\pi}(\mathbf{C}) \times \prod_{\pi\in I_{GL}} \mathrm{GL}_{m_\pi}(\mathbf{C}).$$

Pour déterminer le centralisateur de l'image de ϕ dans $\mathrm{SO}_N(\mathbf{C})$, il suffit de prendre les éléments de $Z_{\mathrm{O}_N(\mathbf{C})}(\phi)$ qui ont pour déterminant 1. Or, d'après la décomposition précédente pour $Z \in Z_{\mathrm{O}_N(\mathbf{C})}(\phi)$, on a

$$\begin{aligned}\det(Z) &= \prod_{\pi\in I_O} \det(Z_\pi)^{\dim V_\pi} \prod_{\pi\in I_S} \det(Z_\pi)^{\dim V_\pi} \prod_{\pi\in I_{GL}} \det(Z_\pi)^{\dim V_\pi} \det(Z_\pi^\vee)^{\dim V_\pi^\vee} \\ &= \prod_{\pi\in I_O} \det(Z_\pi)^{\dim V_\pi}.\end{aligned}$$

Notons $\left(\prod_{\pi\in I_O} \mathrm{O}_{m_\pi}(\mathbf{C})\right)_\phi^+ = \left\{(Z_\pi) \in \prod_{\pi\in I_O} \mathrm{O}_{m_\pi}(\mathbf{C}),\ \prod_{\pi\in I_O} \det(Z_\pi)^{\dim V_\pi} = 1\right\}$. Par suite,

$$Z_{\mathrm{SO}_N(\mathbf{C})}(\phi) = \left(\prod_{\pi\in I_O} \mathrm{O}_{m_\pi}(\mathbf{C})\right)_\phi^+ \times \prod_{\pi\in I_S} \mathrm{Sp}_{m_\pi}(\mathbf{C}) \times \prod_{\pi\in I_{GL}} \mathrm{GL}_{m_\pi}(\mathbf{C}).$$

On a $Z_{\mathrm{O}_N(\mathbf{C})}(\phi)^\circ = Z_{\mathrm{SO}_N(\mathbf{C})}(\phi)^\circ$. Avec une identification évidente, on a un isomorphisme de groupes :

$$A_{\mathrm{O}_N(\mathbf{C})}(\phi) = \prod_{\pi\in I_O} \mathrm{O}_{m_\pi}(\mathbf{C})/\mathrm{SO}_{m_\pi}(\mathbf{C}) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{|I_O|}.$$

Ceci permet de voir $A_{\mathrm{O}_N(\mathbf{C})}(\phi)$ comme un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel. L'application det : $Z_{\mathrm{O}_N(\mathbf{C})}(\phi) \to \{\pm 1\}$, se factorise à $A_{\mathrm{O}_N(\mathbf{C})}(\phi)$, en une forme linéaire

$$\begin{array}{rcl} A_{\mathrm{O}_N(\mathbf{C})}(\phi) & \longmapsto & \mathbf{F}_2 \\ (Z_\pi)_{\pi\in I_O} & \mapsto & \sum_{\pi\in I_O} (\dim V_\pi) \det(Z_\pi) \end{array}.$$

Cette forme linéaire est nulle, si et seulement si, pour tout $\pi \in I_O, \dim V_\pi$ est paire. Le noyau de cette forme linéaire étant $A_{\mathrm{SO}_N(\mathbf{C})}(\phi)$, on obtient donc

$$A_{\mathrm{SO}_N(\mathbf{C})}(\phi) \simeq \begin{cases} (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{|I_O|} & \text{si pour tout } \pi \in I_O, \dim V_\pi \text{ est paire} \\ (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{|I_O|-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que pour une raison de parité, si N est impair, alors toutes les dimensions de V_π, $\pi \in I_O$, ne sont pas paires.

Remarque 2.4. Dans la suite, si $\pi \in I$, nous noterons aussi $\widehat{G}_\pi$ le groupe d'isométrie de l'espace M_π comme ci-dessus, muni de la forme bilinéaire $\varepsilon_\phi\varepsilon_\pi$-symétrique correspondante. Par exemple, lorsque $\widehat{G}$ est un groupe symplectique et que $\pi \in I_O$, alors $\widehat{G}_\pi = \mathrm{Sp}_{m_\pi}$.

2.3 Paramètres de Langlands des représentations supercuspidales

Dans cette section, afin d'énoncer le théorème de Mœglin sur le paramétrage de Langlands des représentations irréductibles supercuspidales des groupes classiques d'après la construction d'Arthur, nous rappelons succinctement la notion de bloc de Jordan pour les représentations et les paramètres de Langlands des groupes classiques.

Comme dans la section précédente, on note G (ou G_n) l'un des groupes déployés $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ ou $\mathrm{SO}_n(F)$. Les sous-groupes de Levi des groupes que l'on considère sont de la forme $\mathrm{GL}_{d_1} \times \ldots \times \mathrm{GL}_{d_r} \times G_{n'}$, avec $G' = G_{n'}$ un groupe de même type que G mais de rang semi-simple inférieur. Par conséquent, si π_i est une représentation de GL_{d_i} et τ une représentation de G', comme il est d'usage de noter, nous noterons $\pi_1 \times \ldots \times \pi_r \rtimes \tau$ pour l'induite parabolique normalisée de $\pi_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \pi_r \boxtimes \tau$, relativement à un sous-groupe parabolique standard (pour le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieurs et du tore maximal diagonal). Enfin, si π est une représentation irréductible supercuspidale unitaire d'un groupe linéaire $\mathrm{GL}_d(F)$ et $a \geqslant 1$ un entier, la représentation induite

$$\pi|\ |^{\frac{a-1}{2}} \times \pi|\ |^{\frac{a-3}{2}} \times \ldots \times \pi|\ |^{\frac{1-a}{2}}$$

admet une unique sous-représentation irréductible, c'est une représentation de la série discrète de $\mathrm{GL}_{ad}(F)$ et on la note $\mathrm{St}(\pi, a)$.
Soit τ une représentation irréductible de la série discrète de G. On appelle bloc de Jordan de τ et on note $\mathrm{Jord}(\tau)$ l'ensemble des couples (π, a) formés d'une représentation supercuspidale irréductible unitaire π d'un groupe $\mathrm{GL}_{d_\pi}(F)$ et d'un entier $a \geqslant 1$ tel qu'il existe un entier $a' \geqslant 1$ et

$$\begin{cases} a \equiv a' \mod 2 & \\ \mathrm{St}(\pi, a) \rtimes \tau & \text{irréductible} \\ \mathrm{St}(\pi, a') \rtimes \tau & \text{réductible} \end{cases}$$

De plus, Arthur a associé à τ un caractère d'un certain groupe fini que l'on note ε_τ (voir [Mœg11, 2.5]).
Soit $\varphi \in \Phi(G)_2$ un paramètre discret de G. Considérons la décomposition en composante isotypique de φ composé avec le plongement naturel $\widehat{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_{N_{\widehat{G}}}(\mathbf{C})$

$$\varphi = \bigoplus_{\pi \in I} \bigoplus_{a \in J_\pi} \pi \boxtimes S_a,$$

où S_a est la représentation irréductible de dimension a de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, I est l'ensemble des (classes de) représentations irréductibles de W_F apparaissant dans la décomposition de φ et pour $\pi \in I$, J_π l'ensemble des entiers $a \geqslant 1$ tels que $\pi \boxtimes S_a$ soit une sous-représentation irréductible de φ. La discrétion du paramètre φ implique qu'il n'y a pas de multiplicité. On appelle bloc de Jordan de φ l'ensemble $\mathrm{Jord}(\varphi) = \{(\pi, a),\ \pi \in I, a \in J_\pi\}$. On dira que $\mathrm{Jord}(\varphi)$ est sans trou si pour tout $(\pi, a) \in \mathrm{Jord}(\varphi)$ avec $a \geqslant 3$ alors $(\pi, a-2) \in \mathrm{Jord}(\varphi)$.
Pour $(\pi, a) \in \mathrm{Jord}(\varphi)$ est associé un élément $z_{\pi,a} \in A_{\widehat{G}}(\varphi)$ qui agit par -1 sur l'espace associé à $\pi \boxtimes S_a$ et par 1 ailleurs. Le groupe $A_{\widehat{G}}(\varphi)$ est engendré par

$$\begin{cases} z_{\pi,a} & \text{pour } (\pi, a) \in \mathrm{Jord}(\varphi) \text{ et } a \text{ pair} \\ z_{\pi,a} z_{\pi,a'} & \text{pour } (\pi, a), (\pi, a') \in \mathrm{Jord}(\varphi) \text{ sans hypothèse de parité sur } a \text{ et } a' \end{cases}$$

Pour $(\pi, a), (\pi, a') \in \mathrm{Jord}(\varphi)$, avec $a' < a$, on dit qu'ils sont consécutifs si pour tout $b \in [\![a'+1, a-1]\!]$, $(\pi, b) \notin \mathrm{Jord}(\varphi)$. Enfin, on note $a_{\pi,\min}$ le plus petit entier $a \geqslant 1$ tel que $(\pi, a) \in \mathrm{Jord}(\varphi)$. Un caractère ε de $A_{\widehat{G}}(\varphi)$ sera dit alterné si pour tout $(\pi, a), (\pi, a') \in \mathrm{Jord}(\varphi)$ consécutifs, $\varepsilon(z_{\pi,a} z_{\pi,a'}) = -1$ et si pour tout $(\pi, a_{\pi,\min}) \in \mathrm{Jord}(\varphi)$ avec $a_{\pi,\min}$ pair, $\varepsilon(z_{\pi,a_{\pi,\min}}) = -1$.

À présent, nous pouvons énoncer le paramétrage des représentations supercuspidales de G.

Théorème 2.5 (Mœglin, [Mœg11, 2.51]). *La classification de Langlands des séries discrètes de* G *telle qu'établie par Arthur, induit une bijection entre l'ensemble des classes des représentations irréductibles supercuspidales de* G *et l'ensemble des couples* (φ, ε) *tel que* $\mathrm{Jord}(\varphi)$ *est sans trou et* ε *est alternée ; la bijection* $\tau \mapsto (\varphi, \varepsilon)$ *est définie par le fait que* $\mathrm{Jord}(\varphi) = \mathrm{Jord}(\tau)$ *et* $\varepsilon = \varepsilon_\tau$.

Chapitre 3

Centre de Bernstein et algèbre de Hecke

3.1 Centre de Bernstein

Dans cette section, on reprend les notations de la section 2.1 et on résumera les résultats de base de la théorie du centre de Bernstein (voir [Ber84]). Notons $\mathrm{Rep}(G)$ la catégorie des représentations (complexes) lisses de G et $\mathbf{Irr}(G)$ l'ensemble (des classes) des représentations irréductibles de G. Si $P = MN$ est un sous-groupe parabolique de G, de facteur de Levi M, on notera $i_P^G : \mathrm{Rep}(M) \longrightarrow \mathrm{Rep}(G)$ le foncteur d'induction normalisé et $r_P^G : \mathrm{Rep}(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}(M)$ le foncteur de Jacquet. Ces deux foncteurs sont essentiels en théorie des représentations. En effet, l'induction permet de construire des représentations de G à partir des représentations d'un sous-groupe de ce dernier. Dès lors, l'étude des représentations de G se décompose en l'étude des représentations qu'on obtient par le procédé d'induction et l'étude des représentations qui ne sont pas obtenues ainsi. C'est l'objet de la théorie du centre de Bernstein. On obtient une décomposition de $\mathrm{Rep}(G)$ en produit de sous-catégories pleines indécomposables dont le centre (de chacune de ces sous-catégories) est isomorphe à l'algèbre des fonctions régulières du quotient d'un tore par l'action d'un groupe fini.

Introduisons $G^1 = \{g \in G,\ \forall \chi \in X^*(G),\ v_F(\chi(g)) = 0\}$, où $X^*(G)$ désigne le groupe des caractères rationnels de G et $\mathfrak{X}(G) = \mathrm{Hom}(G/G^1, \mathbf{C}^\times)$ le groupe des caractères non-ramifiés de G.
Notons $X_*(G)$ le groupes des cocaractères rationnels de G et soit $H_G : G \longrightarrow X_*(G)$ le morphisme défini pour tout $g \in G$, par $\langle \chi, H_G(g) \rangle = v_F(\chi(g))$, pour tout $\chi \in X^*(G)$. Nous noterons $\Lambda(G)$ l'image de G dans $X_*(G)$ (ainsi $\Lambda(G) \simeq G/G^1$).
Soit $\mathfrak{a}_G^* = X^*(G) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \simeq X^*(A_G) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ et $\mathfrak{a}_{G,\mathbf{C}}^* = X^*(G) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$. On a une surjection

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_{G,\mathbf{C}}^* & \twoheadrightarrow & \mathfrak{X}(G) \\ \chi \otimes s & \longmapsto & [g \mapsto |\chi(g)|^s] \end{array},$$

de noyau de la forme $2\pi i/(\log q)R$, avec $R = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda(G), \mathbf{Z})$.Ceci définit une structure de tore algébrique complexe sur $\mathfrak{X}(G)$. De plus, pour tout $\nu \in \mathfrak{a}_{G,\mathbf{C}}^*$, on notera χ_ν le caractère non-ramifié de G associé par la surjection précédente.

Rappelons le fait suivant [Ren10, lemme VI.7.1]. Soit P (resp. Q) un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M (resp. L) et ρ (resp. σ) une représentation irréductible supercuspidale de M (resp. L). Soit π est une représentation irréductible de G telle que ρ (resp. σ) soit facteur de composition de $r_P^G(\pi)$ (resp. $r_Q^G(\pi)$), alors il existe $g \in G$ tel que ${}^gM = L$ et $\sigma = \rho^g$, où l'on a noté ${}^gM = gMg^{-1} = \{gmg^{-1}, m \in M\}$ et ρ^g la représentation de L définie pour tout $l \in L$, par $\rho^g(l) = \rho(g^{-1}lg)$. Ceci nous amène alors à introduire les définitions suivantes.

Considérons l'ensemble des données cuspidales de G, c'est-à-dire l'ensemble des couples (M, ρ), où M est un sous-groupe de Levi de G et ρ une représentation irréductible supercuspidale de M et définissons les relations d'équivalences suivantes : soit (L, σ) et (M, ρ) deux données cuspidales. On dit qu'elles sont

(i) équivalentes, s'il existe $g \in G$ tel que : ${}^gM = L$ et $\sigma \simeq \rho^g$

(ii) inertiellement équivalentes, s'il existe $g \in G$ et $\chi \in \mathfrak{X}(L)$ tels que : ${}^gM = L$ et $\sigma \simeq \rho^g \otimes \chi$

On appelle paire (ou support) cuspidale (resp. paire (ou support) inertielle) une classe d'équivalence pour la relation (i) (resp. (ii)) et on notera $\Omega(G)$ (resp. $\mathcal{B}(G)$) l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation (i) (resp. (ii)). De plus, on notera (M, ρ) la paire cuspidale (resp. $[M, \rho]$ la paire inertielle) définie à partir de M et ρ.

Comme nous l'avons rappelé précédemment, pour toute représentation irréductible π de G, on peut lui associer son support cuspidal défini comme étant la classe d'une donnée cuspidale $(M, \rho) \in \Omega(G)$ telle que ρ soit un facteur de composition de $r_P^G(\pi)$, où P est un sous-groupe parabolique de facteur de Levi M. Ceci définit donc des applications de support cuspidal et support inertiel :

$$\mathbf{Sc} : \mathbf{Irr}(G) \longrightarrow \Omega(G), \quad \mathbf{Si} : \mathbf{Irr}(G) \longrightarrow \Omega(G) \twoheadrightarrow \mathcal{B}(G).$$

Soit $\mathfrak{s} = [M, \rho] \in \mathcal{B}(G)$ une paire inertielle. On définit les objets suivants

— $T_\mathfrak{s} = \{\rho \otimes \chi, \chi \in \mathfrak{X}(M)\} \simeq \mathfrak{X}(M)/\mathfrak{X}(M)(\rho)$, avec $\mathfrak{X}(M)(\rho) = \{\chi \in \mathfrak{X}(M),\ \rho \simeq \rho \otimes \chi\}$

— $W_\mathfrak{s} = N_G(\mathfrak{s})/M = \{g \in G,\ {}^gM = M, \exists \chi \in \mathfrak{X}(M), \rho^g \simeq \rho \otimes \chi\}/M$

Le groupe fini $W_\mathfrak{s}$ agit sur $T_\mathfrak{s}$ et le quotient $T_\mathfrak{s}/W_\mathfrak{s}$ s'identifie aux supports cuspidaux dans $\mathfrak{s}$, c'est à dire à la fibre au-dessus de $\mathfrak{s}$ par la projection naturelle $\Omega(G) \twoheadrightarrow \mathcal{B}(G)$. Ainsi, $\Omega(G)$ est muni d'une structure de variété algébrique dont les composantes connexes, indexées par $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$, sont des quotients de tores algébriques complexes par l'action de groupes fini (voir [Ren10, Théorème VI.7.1]). Ceci s'écrit

$$\Omega(G) = \bigsqcup_{\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)} T_\mathfrak{s}/W_\mathfrak{s}.$$

L'application **Si** induit une partition de $\mathbf{Irr}(G)$ suivant le support inertiel

$$\mathbf{Irr}(G) = \bigsqcup_{\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)} \mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s},$$

où $\mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s} = \mathbf{Si}^{-1}(\mathfrak{s})$. Plus concrètement, $\mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s}$ est l'ensemble des sous-quotients irréductibles des induites $i_P^G(\rho \otimes \chi)$, pour χ parcourant $\mathfrak{X}(M)$, c'est-à-dire

$$\mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s} = \bigsqcup_{\rho \otimes \chi \in T_\mathfrak{s}/W_\mathfrak{s}} \mathcal{JH}(i_P^G(\rho \otimes \chi)).$$

A présent, pour tout $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$, notons $\mathrm{Rep}(G)_\mathfrak{s}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}(G)$ des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans $\mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s}$.

Théorème 3.1 (Bernstein,[Ber84, 2.10, 2.13], [Ren10, Théorème VI.7.2, VI.10.3])**.** *Toute représentation π de G est scindée selon $\Omega(G)$. La catégorie* $\mathrm{Rep}(G)$ *se décompose en produit de catégories*

$$\mathrm{Rep}(G) = \prod_{\mathfrak{s}\in\mathcal{B}(G)} \mathrm{Rep}(G)_{\mathfrak{s}}.$$

Par ailleurs, si $\mathfrak{Z}(G)_{\mathfrak{s}}$ désigne le centre de la catégorie $\mathrm{Rep}(G)_{\mathfrak{s}}$*, alors*

$$\mathfrak{Z}(G)_{\mathfrak{s}} \simeq \mathbf{C}[T_{\mathfrak{s}}/W_{\mathfrak{s}}].$$

Ainsi,

$$\mathfrak{Z}(G) \simeq \mathbf{C}[\Omega(G)]$$

3.2 Algèbres de Hecke affines

Soit $\mathcal{R} = (X, \Sigma, X^\vee, \Sigma^\vee, \Delta)$ une donnée radicielle basée, c'est-à-dire un quintuplet formé de

- deux $\mathbf{Z}$-modules libres de rang fini X et $X^\vee$ en dualité parfaite $\langle\ ,\ \rangle : X \times X^\vee \longrightarrow \mathbf{Z}$;
- deux sous-ensembles finis $\Sigma \subset X \setminus \{0\}$ et $\Sigma^\vee \subset X^\vee \setminus \{0\}$ et une bijection $\Sigma \longrightarrow \Sigma^\vee$, $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$ telle que pour tout $\alpha \in \Sigma$, $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$;
- pour tout $\alpha \in \Sigma$, la réflexion $s_\alpha : X \longrightarrow X$, $x \longmapsto x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$ stabilise Σ ;
- pour tout $\alpha^\vee \in \Sigma^\vee$, la réflexion $s_{\alpha^\vee} : X^\vee \longrightarrow X^\vee$, $y \longmapsto y - \langle \alpha, y \rangle \alpha^\vee$ stabilise $\Sigma^\vee$;
- un sous-ensemble $\Delta \subset \Sigma$ de racines simples et $\Sigma^+ \subset \Sigma$ un sous-ensemble de racines positives.

On suppose que le système de racines Σ est réduit, c'est-à-dire, pour tout $\alpha \in \Sigma$, $2\alpha \notin \Sigma$. On note W le groupe de Weyl associé à Σ, c'est-à-dire le groupe engendré par $\{s_\alpha, \alpha \in \Sigma\}$ et ℓ la fonction longueur de W. Notons par ailleurs $T = X^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}^\times$ et pour tout $x \in X$ définissons θ_x par

$$\begin{array}{rccc} \theta_x : & T & \longrightarrow & \mathbf{C}^\times \\ & y \otimes z & \longmapsto & z^{\langle x, y \rangle} \end{array}.$$

Soit $\lambda : \Delta \longrightarrow \mathbf{N}$ et $\lambda^* : \{\alpha \in \Delta,\ \alpha^\vee \in 2X^\vee\} \longrightarrow \mathbf{N}$ des fonctions telles que $\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha')$ et $\lambda^*(\alpha) = \lambda^*(\alpha')$ pour tout $\alpha, \alpha' \in \Delta$ qui sont W-conjuguées.

Définition 3.2. Soit v une indéterminée. On appelle algèbre de Hecke affine associé à la donnée radicielle $\mathcal{R}$ et de paramètres (λ, λ^*), et on note $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}^{\lambda,\lambda^*}$ (ou plus simplement $\mathcal{H}$), la $\mathbf{C}[v^{\pm 1}]$-algèbre associative unitaire définie par les générateurs $(T_w)_{w \in W}$ et $(\theta_x)_{x \in X}$ vérifiant les relations :

- pour tout $\alpha \in \Delta$, $(T_{s_\alpha} + 1)(T_{s_\alpha} - v^{2\lambda(\alpha)}) = 0$;
- pour tout $w, w' \in W$ tels que $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, $T_w T_{w'} = T_{ww'}$;
- pour tout $x, x' \in X$, $\theta_x \theta_{x'} = \theta_{x+x'}$;
- pour tout $x \in X, \alpha \in \Delta$, $\theta_x T_{s_\alpha} - T_{s_\alpha} \theta_{s_\alpha(x)} = (\theta_x - \theta_{s_\alpha(x)})(G(\alpha) - 1)$, avec

$$G(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\theta_\alpha v^{2\lambda(\alpha)} - 1}{\theta_\alpha - 1} & \text{si } \alpha^\vee \notin 2X^\vee \\[2ex] \dfrac{(\theta_\alpha v^{\lambda(\alpha)+\lambda^*(\alpha)} - 1)(\theta_\alpha v^{\lambda(\alpha)-\lambda^*(\alpha)} + 1)}{\theta_{2\alpha} - 1} & \text{si } \alpha^\vee \in 2X^\vee \end{cases}$$

Soit R un groupe fini qui agit sur $\mathcal{R}$ et tel que pour tout $r \in R, \alpha \in \Delta,\ \lambda(r(\alpha)) = \lambda(\alpha)$ et $\lambda^*(r(\alpha)) = \lambda(\alpha)$. On peut considérer le groupe de Weyl étendu $W' = R \ltimes W$ et l'algèbre de Hecke affine étendue

$$\mathcal{H}' = \mathbf{C}[R] \ltimes \mathcal{H},$$

les générateurs $(J_r)_{r\in R}$ de $\mathbf{C}[R]$ vérifiant pour tout $r, r' \in R,\ x \in X,\ w \in W$:

$$J_r T_w = T_{r(w)} J_r,\ J_r\theta_x = \theta_{r(x)} J_r,\ J_r J_{r'} = J_{rr'}.$$

Soit $\mathcal{H}_W$ (resp. $\mathcal{A}$) la $\mathbf{C}[v^{\pm 1}]$-sous-algèbre de $\mathcal{H}$ engendrée par $(T_w)_{w\in W}$ (resp. $(\theta_x)_{x\in X}$). En tant que $\mathbf{C}$-algèbre, on a les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_W &\simeq \mathbf{C}[W] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[v^{\pm 1}], \\ \mathcal{A} &\simeq \mathbf{C}[T \times \mathbf{C}^\times], \qquad\qquad \text{(algèbre des fonctions régulières sur } T \times \mathbf{C}^\times) \end{aligned}$$

et en tant que $\mathbf{C}[v^{\pm 1}]$-module, on a l'isomorphisme

$$\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_W \otimes_{\mathbf{C}[v^{\pm 1}]} \mathcal{A}.$$

Dans le cas d'une algèbre de Hecke affine étendue, en notant $\mathcal{H}_{W'} = \mathbf{C}[R] \ltimes \mathcal{H}_W$, on a de même

$$\mathcal{H}' \simeq \mathcal{H}'_W \otimes_{\mathbf{C}[v^{\pm 1}]} \mathcal{A}.$$

De l'action naturelle de W sur $T \times \mathbf{C}^\times$, se déduit une action sur $\mathcal{A}$ (pour tout $w \in W, f \in \mathcal{A}, t \in T \times \mathbf{C}^\times$, $w \cdot f(t) = f(w^{-1} \cdot t)$). Notons $\mathcal{A}^W$ les points fixes de $\mathcal{A}$ sous l'action de W. Ce sont les fonctions régulières sur $T \times \mathbf{C}^\times$ constantes sur les W-orbites.

Théorème 3.3 (Bernstein-Lusztig [Lus89, 3.11])**.** *Le centre de l'algèbre de Hecke affine $\mathcal{H}$ est $\mathcal{Z} = \mathcal{A}^W$. Supposons que l'action de R soit fidèle. Alors, le centre de $\mathcal{H}'$ est $\mathcal{Z}' = \mathcal{A}^{W'}$.*

Soit $\mathrm{mod}(\mathcal{H})$ (resp. $\mathrm{mod}(\mathcal{H}')$) la catégorie des $\mathcal{H}$-modules (resp. $\mathcal{H}'$-modules) de dimension finies. D'après le lemme de Schur, pour tout $\mathcal{H}$-module irréductible, le centre de $\mathcal{H}$ agit par un caractère $\omega : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbf{C}$. Par ailleurs, d'après le théorème de Bernstein-Lusztig, ce caractère central correspond à un élément de $T/W \times \mathbf{C}^\times$. Pour tout caractère central $\omega : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbf{C}$ (correspondant à l'élément $(s, z) \in T/W \times \mathbf{C}^\times$), notons $\mathrm{mod}(\mathcal{H})_\omega$ (ou $\mathrm{mod}(\mathcal{H})_{(s,z)}$) la catégorie des $\mathcal{H}$-module dont tous les sous-quotients irréductibles admettent ω pour caractère central et $\mathbf{Irr}(\mathcal{H})_\omega$ (ou $\mathbf{Irr}(\mathcal{H})_{(s,z)}$) les $\mathcal{H}$-modules irréductibles admettant ω pour caractère central. On obtient les décompositions suivantes

$$\mathrm{mod}(\mathcal{H}) = \prod_{\omega\in\mathcal{Z}} \mathrm{mod}(\mathcal{H})_\omega \qquad\qquad \mathbf{Irr}(\mathcal{H}) = \bigsqcup_{\omega\in\mathcal{Z}} \mathbf{Irr}(\mathcal{H})_\omega.$$

Soit M un $\mathcal{H}'$-module de dimension finie. Pour tout $t \in T$, on pose

$$M_t = \left\{ m \in M, \exists d \in \mathbf{N}, \forall x \in X, (\theta_x - x(t))^d m = 0 \right\},$$

et

$$X^+ = \{x \in X, \forall \alpha \in \Delta, \langle x, \alpha^\vee \rangle \geqslant 0\}.$$

Définition 3.4. Soit M un $\mathcal{H}'$-module de dimension finie où v agit par un réel $v_0 \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$.

— On dit que M est tempéré, si pour tout $x \in X^+$ et pour tout $t \in T$ tel que $M_t \neq 0$, $\log|x(t)|/\log|v_0| \leqslant 0$.

— Soit Z un sous-réseau de X contenu dans le centre de $\mathcal{H}'$. On suppose que Z agit sur M par un caractère unitaire et que $Z \cup \Delta$ engendre un $\mathbf{Z}$-module d'indice fini de X. On dit que M est de carré intégrable modulo Z, si pour tout $x \in X^+\backslash\{0\}$ et pour tout $t \in T$ tel que $M_t \neq 0$, $\log|x(t)|/\log|v_0| < 0$.

3.3 Algèbres de Hecke graduées

Soit $\mathfrak{t} = X^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ l'algèbre de Lie de T et $\mathfrak{t}^* = X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ son dual. La dualité entre X et $X^\vee$ s'étend en une dualité entre $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}^*$. Soit r une indéterminée et $S(\mathfrak{t}^*)$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{t}^*$. On fixe une orbite $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}'$) d'un élément $\zeta \in T$ sous l'action de W (resp. W').

Définition 3.5. On appelle algèbre de Hecke graduée associé à la donnée radicielle $\mathcal{R}$ et à l'orbite $\mathcal{O}$, et on note $\mathbb{H}_{\mathcal{R},\mathcal{O}}$ (ou plus simplement $\mathbb{H}_{\mathcal{O}}$), la $\mathbf{C}[r]$-algèbre engendrée par $(t_w)_{w\in W}$, $S(\mathfrak{t}^*)$ et un ensemble d'idempotents orthogonaux $(E_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{O}}$ avec

— pour tout $w, w' \in W$, $t_w t_{w'} = t_{ww'}$;

— pour tout $\sigma \in \mathcal{O}$, $\alpha \in \Delta$, $E_\sigma t_{s_\alpha} = t_{s_\alpha} E_{s_\alpha \sigma}$;

— $\sum_{\sigma\in\mathcal{O}} E_\sigma = 1$;

— pour tout $\alpha \in \Delta$, $\gamma \in \mathfrak{t}^*$, $\gamma t_{s_\alpha} - t_{s_\alpha} s_\alpha(\gamma) = r g(\alpha)\langle\gamma, \alpha^\vee\rangle$ avec $g(\alpha) = \sum_{s\in\mathcal{O}} \mu_s(\alpha) E_\sigma$ et

$$\mu_\sigma(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_\alpha(\sigma) \neq \sigma \\ 2\lambda(\alpha) & \text{si } s_\alpha(\sigma) = \sigma, \alpha^\vee \notin 2X^\vee \\ \lambda(\alpha) + \lambda^*(\alpha)\theta_{-\alpha}(\sigma) & \text{si } s_\alpha(\sigma) = \sigma, \alpha^\vee \in 2X^\vee \end{cases}$$

On peut encore une fois considérer l'algèbre de Hecke graduée étendue

$$\mathbb{H}'_{\mathcal{R},\mathcal{O}} = \mathbf{C}[R] \ltimes \mathbb{H}_{\mathcal{R},\mathcal{O}} \simeq \mathbb{H}_{\mathcal{R},\mathcal{O}'},$$

les générateurs $(j_r)_{r\in R}$ de $\mathbf{C}[R]$ vérifiant pour tout $r, r' \in R,\ \gamma \in \mathfrak{t}^*,\ \sigma \in \mathcal{O},\ w \in W$:

$$j_r t_w = t_{r(w)} j_r,\ j_r \gamma = r(\gamma) j_r,\ E_\sigma j_r = j_r E_{r\sigma},\ j_r j_{r'} = j_{rr'}.$$

Supposons l'espace d'un instant que $\mathcal{O}$ est un singleton. Dans ce cas, nous noterons $\mathbb{H}_{\mu_\zeta}$ l'algèbre de Hecke graduée associée à $\mathcal{O}$. Pour être plus précis, $\mathbb{H}_{\mu_\zeta}$ est en tant que $\mathbf{C}[r]$-module $\mathbf{C}[W] \otimes_{\mathbf{C}} S(\mathfrak{t}^*) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[r]$. Ainsi $\mathbb{H}_{\mu_\zeta}$ est engendrée par $(t_w)_{w\in W}$, $S(\mathfrak{t}^*)$ et vérifie les relations suivantes

— pour tout $w, w' \in W$, $t_w t_{w'} = t_{ww'}$;

— pour tout $\alpha \in \Delta$, $\gamma \in \mathfrak{t}^*$, $\gamma t_{s_\alpha} - t_{s_\alpha} s_\alpha(\gamma) = r\mu_\zeta(\alpha)\langle\gamma, \alpha^\vee\rangle$ avec

$$\mu_\sigma(\alpha) = \begin{cases} 2\lambda(\alpha) & \text{si } s_\alpha(\sigma) = \sigma, \alpha^\vee \notin 2X^\vee \\ \lambda(\alpha) + \lambda^*(\alpha)\theta_{-\alpha}(\sigma) & \text{si } s_\alpha(\sigma) = \sigma, \alpha^\vee \in 2X^\vee \end{cases}.$$

Revenons au cas général et considérons $Z_W(\zeta) = \{w \in W, w\cdot\zeta = \zeta\}$ et $Z_{W'}(\zeta) = \{w \in W', w\cdot\zeta = \zeta\}$. Soit $\{w_1, \cdots, w_n\}$ (resp. $\{w'_1, \cdots, w'_m\}$) un ensemble de représentants de $W/Z_W(\zeta)$ (resp. $W'/Z_{W'}(\zeta)$) avec $w_1 = w'_1 = 1$. Notons $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) la $\mathbf{C}$-algèbre engendrée par $(E_{w_i\zeta})_{i\in[\![1,n]\!]}$ (resp. $(E_{w'_i\zeta})_{i\in[\![1,m]\!]}$) et définissons

$$\mathbb{A} = S(\mathfrak{t}^* \oplus \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{E} \simeq \mathbf{C}[r] \otimes_{\mathbf{C}} S(\mathfrak{t}^*) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{E},$$
$$\mathbb{A}' = S(\mathfrak{t}^* \oplus \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{E}' \simeq \mathbf{C}[r] \otimes_{\mathbf{C}} S(\mathfrak{t}^*) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{E}'.$$

De plus, $S(\mathfrak{t}^* \oplus \mathbf{C}) = S(\mathfrak{t}^*) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[r]$ s'identifie à l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathfrak{t} \oplus \mathbf{C}$.

Proposition 3.6 ([Lus89, 4.5]). *Le centre de $\mathbb{H}_{\mathcal{O}}$ est $Z = \mathbb{A}^W$. Supposons que l'action de R soit fidèle. Alors, le centre de $\mathbb{H}'_{\mathcal{O}}$ est $Z' = \mathbb{A}'^{W'}$.*

Comme précédemment, tout caractère central $\overline{\omega} : Z' \longrightarrow \mathbf{C}$ correspond à un élément $(\sigma, r_0) \in \mathfrak{t}/Z_{W'}(\zeta) \times \mathbf{C}$.

Soit $\overline{M}$ un $\mathbb{H}'_{\mathcal{O}}$-module de dimension finie. Pour tout $\nu \in \mathfrak{t}$, on pose

$$\overline{M}_\nu = \left\{ m \in \overline{M}, \exists d \in \mathbf{N}, \forall \gamma \in S(\mathfrak{t}^*), (\gamma - \gamma(\nu))^d m = 0 \right\},$$

et

$$S(\mathfrak{t}^*)^+ = \{\gamma \in S(\mathfrak{t}^*), \forall \alpha \in \Delta, \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle \geqslant 0\}.$$

Définition 3.7. Soit $\overline{M}$ un $\mathbb{H}'$-module de dimension finie où r agit par un réel $r_0 \in \mathbf{R}^*$.

— On dit que $\overline{M}$ est tempéré, si pour tout $\nu \in \mathfrak{t}$ tel que $\overline{M}_\nu \neq 0$, pour tout $\gamma \in S(\mathfrak{t}^*)^+$, on a $\mathrm{Re}\langle \gamma, \nu \rangle / \mathrm{Re}(r_0) \leqslant 0$.

— Soit Z un sous-réseau de X tel que $Z \otimes \mathbf{C}$ est contenu dans le centre de $\mathbb{H}'$. On suppose que Z agit sur $\overline{M}$ par un caractère unitaire et que $Z \cup \Delta$ engendre un $\mathbf{Z}$-module d'indice fini de X. On dit que $\overline{M}$ est de carré intégrable modulo Z, si pour tout si pour tout $\nu \in \mathfrak{t}$ tel que $\overline{M}_\nu \neq 0$, pour tout $\gamma \in S(\mathfrak{t}^*)^+$, on a $\mathrm{Re}\langle \gamma, \nu \rangle / \mathrm{Re}(r_0) < 0$.

Soit $\zeta \in \mathcal{O}'$. Définissons la donnée radicielle basée suivante $\mathcal{R}_\zeta = (X, \Sigma, X^\vee, \Sigma_\zeta^\vee, \Delta_\zeta)$ par

$$\begin{aligned}
\Sigma_\zeta &= \left\{ \alpha \in \Sigma, \theta_\alpha(\zeta) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \alpha^\vee \notin 2X^\vee \\ \pm 1 & \text{si } \alpha^\vee \in 2X^\vee \end{array} \right. \right\}; \\
\Sigma_\zeta^+ &= \Sigma_\zeta \cap \Sigma^+; \\
\Sigma_\zeta^\vee &= \left\{ \alpha^\vee, \alpha \in \Sigma_\zeta \right\}; \\
\Delta_\zeta &= \left\{ \alpha \in \Sigma_\zeta^+, \alpha \text{ n'est pas de la forme } \alpha' + \alpha'' \text{ avec } \alpha', \alpha'' \in \Sigma_\zeta^+ \right\}; \\
W_\zeta &= \langle s_\alpha, \alpha \in \Delta_\zeta \rangle; \\
R_\zeta &= \left\{ w \in Z_{W'}(\zeta), w\Sigma_\zeta^+ = \Sigma_\zeta^+ \right\}
\end{aligned}$$

On a alors $Z_{W'}(\zeta) = R_\zeta \ltimes W_\zeta$. La $Z_{W'}(\zeta)$-orbite de ζ étant évidemment un singleton, on peut considérer l'algèbre de Hecke graduée étendue

$$\mathbb{H}'_{\mathcal{R}_\zeta, \mu_\zeta} = \mathbf{C}[R_\zeta] \ltimes \mathbb{H}_{\mathcal{R}_\zeta, \mu_\zeta}.$$

Pour tout $i, j \in [\![1, m]\!]$, posons

$$E_{i,j} = t_{w_i^{-1}} E_\zeta t_{w_j},$$

et notons $\mathcal{M}_n$ la $\mathbf{C}$-algèbre engendrée par $(E_{i,j})$.

Rappelons rapidement la décomposition polaire pour le tore complexe T.
Soit S^1 le groupe des complexes de module 1, $T_e = X^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} S^1$ et $T_h = X^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}_+^*$. Le tore $T = X^\vee \otimes \mathbf{C}^\times$ admet alors la décomposition $T = T_e \times T_h$. Ainsi, tout élément $s \in T$ admet une unique décomposition $s = s_e s_h = s_h s_e$, avec $s_e \in T_e$ et $s_h \in T_h$. On dit que s_e est la partie elliptique de s et s_h la partie hyperbolique. Ces éléments ont aussi la propriété suivante : pour tout caractère algébrique $\chi : T \longrightarrow \mathbf{C}^\times$, $\chi(s_e) \in S^1$ et $\chi(s_h) \in \mathbf{R}_+^*$. De la même façon, en notant $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}} = X^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ et $\mathfrak{t}_{i\mathbf{R}} = X^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} i\mathbf{R}$, alors $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{\mathbf{R}} \oplus \mathfrak{t}_{i\mathbf{R}}$.

Soit $\zeta \in T$ un élément elliptique et $\mathcal{O}'$ la W'-orbite de ζ. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{t}_{\mathbf{R}} \oplus \mathbf{C} & \longrightarrow & T \times \mathbf{C}^{\times} \quad , \\ (\nu, r_0) & \longmapsto & (\zeta e^{\nu}, e^{r_0}) \end{array}$$

est $Z_{W'}(\zeta)$-invariante et elle fait correspondre $W' \cdot (\zeta e^{\nu}, e^{r_0})$ à $Z_{W'}(\zeta) \cdot (\nu, r_0)$. Ainsi, elle induit une bijection entre les caractères centraux de $\mathcal{H}'$ de partie elliptique dans $\mathcal{O}'$ et les caractères centraux hyperboliques de $\mathbb{H}'_{\mathcal{O}}$.

Théorème 3.8 (Lusztig)**.** *Soit $\zeta \in T$ un élément elliptique, $\nu \in \mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$, $r_0 > 1$ un réel. Soit $\overline{\omega} = Z_{W'}(\zeta) \cdot (\nu, r_0)$ un caractère central hyperbolique de $\mathbb{H}'_{\mathcal{O}}$ et $\omega = W' \cdot (\zeta e^{\nu}, e^{r_0})$ le caractère central de $\mathcal{H}'$ correspond à $\overline{\omega}$ par l'application précédente.*
Soit $\mathcal{M}_n$ la $\mathbf{C}$-algèbre engendrée par $(E_{i,j})$ et $\mathcal{C}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{C} E_{i,1}$.

1. *[Lus89, 8.6] L'algèbre $\mathcal{M}_n$ est un algèbre de matrices et on a un isomorphisme*

$$\mathbb{H}'_{\mathcal{R},\mathcal{O}} \simeq \mathcal{M}_n \otimes_{\mathbf{C}} \mathbb{H}'_{\mathcal{R}_\zeta,\mu_\zeta} = \mathcal{M}_n \otimes_{\mathbf{C}} (\mathbb{H}_{\mathcal{R}_\zeta,\mu_\zeta} \rtimes \mathbf{C}[R_\zeta]).$$

2. *Le foncteur*

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{F}: & \mathrm{mod}(\mathbb{H}'_{\mathcal{R}_\zeta,\mu_\zeta}) & \longrightarrow & \mathrm{mod}(\mathbb{H}'_{\mathcal{R},\mathcal{O}}) \quad , \\ & \mathcal{V} & \longmapsto & \mathcal{C}_n \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{V} \end{array}$$

est une équivalence de catégories et en tant que $\mathbf{C}[W']$-modules, $\mathcal{F}(\mathcal{V}) = \mathrm{Ind}_{Z_{W'}(\zeta)}^{W'} \mathcal{V}$.

3. *[Lus89, 9.3] Il y a une équivalence de catégories*

$$\mathrm{mod}(\mathcal{H}'_{\mathcal{R}})_{\omega} \simeq \mathrm{mod}(\mathbb{H}'_{\mathcal{R},\mathcal{O}})_{\overline{\omega}},$$

qui combiné avec la précédente donne lieu à l'équivalence de catégories

$$\mathrm{mod}(\mathcal{H}'_{\mathcal{R}})_{\omega} \simeq \mathrm{mod}(\mathbb{H}'_{\mathcal{R}_\zeta,\mu_\zeta})_{\overline{\omega}}.$$

4. *[Lus02a, 4.3,4.4] Cette dernière équivalence de catégories, préservent les modules tempérées et ceux de la série discrète.*

3.4 Algèbre de Hecke graduée associée à triplet cuspidal

Soit H un groupe réductif connexe complexe, $P = LU$ un sous-groupe parabolique de H. Notons $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H et $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ celle de P. Soit $\mathcal{C} \subset \mathfrak{l}$ une L-orbite nilpotente supportant un système local irréductible cuspidal L-équivariant noté $\mathcal{L}$. Notons $\mathfrak{t} = [L, \mathcal{C}, \mathcal{L}]$ le triplet cuspidal correspondant.
Soit T le plus grand tore central dans L, c'est-à-dire $T = Z_L^{\circ}$ et $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. On sait que $W_L^H = N_H(T)/L$ est un groupe de Coxeter. Plus précisément, pour toute forme linéaire $\alpha : \mathfrak{l} \longrightarrow \mathbf{C}$, notons

$$\mathfrak{h}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{h}, \, \forall t \in \mathfrak{t}, \, [t, x] = \alpha(t) x\},$$

son espace de poids. Notons

$$\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{t}^*, \; \alpha \neq 0, \, \mathfrak{h}_{\alpha} \neq 0\},$$

et

$$\Sigma^{+} = \{\alpha \in \Sigma, \mathfrak{h}_{\alpha} \subset \mathfrak{u}\}.$$

Soit $P_1, \dots, P_m$ les sous-groupes paraboliques de H qui contiennent strictement P et qui sont minimal pour cette propriété. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons L_i le sous-groupe de Levi de P_i qui contient L et $\Sigma_i^+ = \{\alpha \in \Sigma,\ \alpha_{|\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_i)} = 0\}$. On a alors $\mathfrak{l}_i \cap \mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_i^+} \mathfrak{h}_\alpha$ et Σ est un système de racines (non nécessairement réduit) dans $\mathfrak{t}^*$ qui est engendré par les formes linéaires de $\mathfrak{t}$ qui sont nulles sur le centre de $\mathfrak{h}$. De plus, Σ_i^+ contient un unique élément α_i tel que $\alpha_i/2 \notin \Sigma$. L'ensemble $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ est un système de racines simples de Σ. De plus,W_L^H est le groupe de Coxeter engendré par les réflexions simples s_i, où s_i est l'unique élément non trivial de $N_{L_i}(T)/L$.
Soit $N \in \mathcal{C}$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, soit $\mu_\mathfrak{t}(\alpha) \geqslant 2$ le plus petit entier tel que

$$\mathrm{ad}(N)^{\mu_\mathfrak{t}(\alpha)-1} : \mathfrak{l}_\alpha \cap \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{l}_\alpha \cap \mathfrak{u},$$

est nul. Si $\alpha \in \Delta$ est conjuguée à $\alpha' \in \Delta$ dans W_L^H, alors $\mu_\mathfrak{t}(\alpha) = \mu_\mathfrak{t}(\alpha')$. La fonction $\mu_\mathfrak{t} : \Delta \longrightarrow \mathbf{N}$ est une fonction paramètre dans le sens vu dans la section précédente.

Considérons l'algèbre de Hecke graduée associé à ce triplet cuspidal. Comme nous l'avons déjà vu précédemment, c'est le $\mathbf{C}[r]$-module $\mathbf{C}[W] \otimes_\mathbf{C} S(\mathfrak{t}^*) \otimes_\mathbf{C} \mathbf{C}[r]$ que l'on note $\mathbb{H}_{\mu_\mathfrak{t}} = \mathbb{H}_{\mu_\mathfrak{t}}(\mathfrak{t}^*, \Sigma)$. Elle est engendrée par $(t_w)_{w \in W}$ et $(\gamma)_{\gamma \in \mathfrak{t}^*}$ vérifiant les relations
— pour tout $w, w' \in W$, $t_w t_{w'} = t_{ww'}$;
— pour tout $\alpha \in \Delta$, $\gamma \in \mathfrak{t}^*$, $\gamma t_{s_\alpha} - t_{s_\alpha} s_\alpha(\gamma) = r\mu_\mathfrak{t}(\alpha)\langle \gamma, \alpha^\vee \rangle$.

Considérons les variétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{h}} &= \left\{(x, h) \in \mathfrak{h} \times H, \mathrm{Ad}(h^{-1})x \in \mathcal{C} + \mathfrak{t} + \mathfrak{u}\right\} \\
\dot{\mathfrak{h}} &= \left\{(x, hP) \in \mathfrak{h} \times H/P, \mathrm{Ad}(h^{-1})x \in \mathcal{C} + \mathfrak{t} + \mathfrak{u}\right\}, \\
\ddot{\mathfrak{h}} &= \left\{(x, hP, h'P) \in \mathfrak{h} \times H/P \times H/P, (x, hP) \in \dot{\mathfrak{h}}, (x, h'P) \in \dot{\mathfrak{h}}\right\}, \\
\dot{\mathfrak{h}}_N &= \left\{(x, hP) \in \mathfrak{h} \times H/P, \mathrm{Ad}(h^{-1})x \in \mathcal{C} + \mathfrak{u}\right\}, \\
\ddot{\mathfrak{h}}_N &= \left\{(x, hP, h'P) \in \mathfrak{h} \times H/P \times H/P, (x, hP) \in \dot{\mathfrak{h}}_N, (x, h'P) \in \dot{\mathfrak{h}}_N\right\},
\end{aligned}$$

et les applications $\mathbf{pr}_\mathcal{C} : \widehat{\mathfrak{h}} \longrightarrow \mathcal{C}$ (resp. $\mathbf{pr}_P : \widehat{\mathfrak{h}} \longrightarrow \dot{\mathfrak{h}}$) qui à $\mathrm{Ad}(h^{-1})x \in \mathcal{C} + \mathfrak{t} + \mathfrak{u}$ associe sa projection sur $\mathcal{C}$ (resp. $(x, h) \longmapsto (x, hP)$). Notons $H_\mathbf{C} = H \times \mathbf{C}^\times$ et de la même façon $L_\mathbf{C} = L \times \mathbf{C}^\times$. On a une action de $H_\mathbf{C}$ sur chacune de ces variétés donnée par

$$\begin{aligned}
(g, \lambda) \cdot (x, h) &= (\lambda^{-2}\mathrm{Ad}(g)x, gh) & (g, \lambda) &\in H_\mathbf{C}, (x, h) \in \widehat{\mathfrak{h}}, \\
(g, \lambda) \cdot (x, hP) &= (\lambda^{-2}\mathrm{Ad}(g)x, ghP) & (g, \lambda) &\in H_\mathbf{C}, (x, h) \in \dot{\mathfrak{h}}, \\
(g, \lambda) \cdot x &= \lambda^{-2}x & (g, \lambda) &\in H_\mathbf{C}, x \in \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[dl, "\mathbf{pr}_\mathcal{C}"'] \arrow[dr, "\mathbf{pr}_P"] & \\
\mathcal{C} & & \dot{\mathfrak{h}}
\end{tikzcd}$$

Puisque $\mathcal{L}$ est $L_\mathbf{C}$-équivariant et que les deux projections $\mathbf{pr}_\mathcal{C}, \mathbf{pr}_P$ sont $H_\mathbf{C}$-équivariante, il existe un unique système local $H_\mathbf{C}$-équivariant sur $\dot{\mathfrak{h}}$ noté $\dot{\mathcal{L}}$ tel que

$$\mathbf{pr}_\mathcal{C}^* \mathcal{L} = \mathbf{pr}_P^* \dot{\mathcal{L}}.$$

Notons toujours $\dot{\mathcal{L}}$ le système local obtenu par restriction sur $\dot{\mathfrak{h}}_N$ et $\dot{\mathcal{L}}^*$ son dual. Le système local $\dot{\mathcal{L}} \boxtimes \dot{\mathcal{L}}^*$ sur $\dot{\mathfrak{h}}_N \times \dot{\mathfrak{h}}_N$ donne par tiré en arrière, à travers $\ddot{\mathfrak{h}}_N \hookrightarrow \dot{\mathfrak{h}}_N \times \dot{\mathfrak{h}}_N$, un système local noté $\ddot{\mathcal{L}}$ sur $\ddot{\mathfrak{h}}_N$. À présent, considérons l'espace d'homologie équivariante tel qu'il a été défini dans [Lus88, §1],

$$H_\bullet^{H_{\mathbf{C}}}(\ddot{\mathfrak{h}}_N, \ddot{\mathcal{L}}).$$

Le groupe W agit à gauche et à droite sur cet espace. D'après [Lus88, 4.2], l'espace de cohomologie $H^\bullet_{H_{\mathbf{C}}}(\dot{\mathfrak{h}}_N, \mathbf{C})$ est isomorphe en tant qu'algèbres graduées à $S(\mathfrak{t}^* \oplus \mathbf{C})$. Ainsi $S(\mathfrak{t}^* \oplus \mathbf{C}) \simeq H^\bullet_{H_{\mathbf{C}}}(\dot{\mathfrak{h}}_N, \mathbf{C})$ agit sur $H_\bullet^{H_{\mathbf{C}}}(\ddot{\mathfrak{h}}_N, \ddot{\mathcal{L}})$ (via les deux projections $\ddot{\mathfrak{h}}_N \longrightarrow \dot{\mathfrak{h}}_N$ et le cup-produit), si bien qu'en tant que $\mathbb{H}_{\mu_\mathfrak{t}}$-bimodule, Lusztig prouve [Lus88, 6.3,6.4],

$$H_\bullet^{H_{\mathbf{C}}}(\ddot{\mathfrak{h}}_N, \ddot{\mathcal{L}}) \simeq \mathbb{H}_{\mu_\mathfrak{t}}.$$

Décrivons les modules standards pour $\mathbb{H}_{\mu_\mathfrak{t}}$ construit par Lusztig.
Soit $x \in \mathfrak{h}$ un élément nilpotent et $\mathcal{P}_x$ la variété

$$\mathcal{P}_x = \{hP \in H/P, \mathrm{Ad}(h^{-1})x \in \mathcal{C} + \mathfrak{u}\}.$$

Le centralisateur $Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)$ agit sur $\mathcal{P}_x$ par $(g, \lambda) \cdot hP = ghP$. Soit $\mathcal{Z}$ la variété des classes d'éléments semisimples sous l'action de $Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ$ dans

$$\mathfrak{z}_{H_{\mathbf{C}}}(x) = \{(\sigma, r_0) \in \mathfrak{h} \oplus \mathbf{C}, [\sigma, x] = 2r_0 x\}.$$

Notons $H^\bullet_{Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ} = H^\bullet_{Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ}(\text{point}, \mathbf{C})$. Le morphisme $\mathcal{P}_x \to$ point, défini un morphisme de $\mathbf{C}$-algèbres $H^\bullet_{Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ} \to H^\bullet_{Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ}(\mathcal{P}_x, \mathbf{C})$. D'après [Lus88, 1.3], $H_\bullet^{Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ}(\mathcal{P}_x, \dot{\mathcal{L}})$ est un $H^\bullet_{Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ}(\mathcal{P}_x, \mathbf{C})$-module et donc un $H^\bullet_{Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ}$-module.

De plus, d'après [Lus88, 8.7], l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathcal{Z}$ est isomorphe à $H^\bullet_{Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ}$. Soit $\mathbf{s} = (\sigma, r_0) \in \mathcal{Z}$. Notons $\mathbf{C_s}$ le $H^\bullet_{Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ}$-module donné par l'évaluation au point $\mathbf{s}$ et considérons le $\mathbb{H}_{\mu_\mathfrak{t}}$-module défini par

$$\mathbb{M}(\sigma, r_0, x) = \mathbf{C_s} \otimes_{H^\bullet_{Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ}} H_\bullet^{Z_{H_{\mathbf{C}}}(x)^\circ}(\mathcal{P}_x, \dot{\mathcal{L}}).$$

Pour tout $\eta \in \mathbf{Irr}(A_{H_{\mathbf{C}}}(\sigma, r_0, x))$, définissons

$$\mathbb{M}(\sigma, r_0, x, \eta) = \mathrm{Hom}_{A_{H_{\mathbf{C}}}(\sigma, r_0, x)}(\eta, \mathbb{M}(\sigma, r_0, x)).$$

Notons $\mathbf{Irr}(A_H(x))_{\mathcal{L}}$ l'ensemble des représentations irréductibles $\widetilde{\eta}$ de $A_H(x)$ telles que $(\mathcal{C}_x^H, \widetilde{\eta})$ soit associé par la correspondance de Springer généralisée à $[L, \mathcal{C}, \mathcal{L}]$. De plus, on a une injection de $A_{H_{\mathbf{C}}}(\sigma, r_0, x) = A_H(\sigma, x)$ dans $A_H(x)$ et on note $\mathbf{Irr}(A_{H_{\mathbf{C}}}(\sigma, r_0, x))_{\mathcal{L}}$ l'ensemble des représentations irréductibles de $A_{H_{\mathbf{C}}}(\sigma, r_0, x)$ apparaissant dans la restriction à $A_{H_{\mathbf{C}}}(\sigma, r_0, x)$ d'une représentation $\widetilde{\eta} \in \mathbf{Irr}(A_H(x))_{\mathcal{L}}$.

Théorème 3.9 (Lusztig). *1. [Lus88, 8.10] $\mathbb{M}(\sigma, r_0, x, \eta) \neq 0$, si et seulement si, $\eta \in \mathbf{Irr}(A_H(\sigma, r_0, x))_{\mathcal{L}}$*

2. [Lus88, 8.15] Tout $\mathbb{H}_{\mu_\mathfrak{t}}$-module simple sur lequel r agit par r_0 est un quotient $\overline{\mathbb{M}}(\sigma, r_0, x, \eta)$ d'un $\mathbb{M}(\sigma, r_0, x, \eta)$, avec $\eta \in \mathbf{Irr}(A_{H_{\mathbf{C}}}(\sigma, r_0, x))_{\mathcal{L}}$

3. *[Lus88, 8.17], [Lus95b, 8.18] L'ensemble des classes de $\mathbb{H}_{\mu_t}$-module simple de caractère central (σ, r_0) est en bijection avec*

$$\mathcal{M}_{\mathbf{s}} = \{(x, \eta), [\sigma, x] = 2r_0 x, \eta \in \mathbf{Irr}(A_H(\sigma, x))_{\mathcal{L}}\}$$

4. *[Lus02b, 1.21] Un $\mathbb{H}_{\mu_t}$-module simple $\overline{\mathbb{M}}(\sigma, r_0, x, \eta)$ est tempérée, si et seulement si, il existe un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (x, h, y) vérifiant $[\sigma, x] = 2r_0 x$, $[\sigma, h] = 0$, $[\sigma, y] = -2r_0 y$ et $\sigma - r_0 h$ est elliptique. Dans ce cas, $\overline{\mathbb{M}}(\sigma, r_0, x, \eta) = \mathbb{M}(\sigma, r_0, x, \eta)$*

5. *[Lus02b, 1.22] Si de plus $\mathcal{C}_x^H$ est une orbite nilpotente distinguée de H, alors $\mathbb{M}(\sigma, r_0, x, \eta)$ est une série discrète.*

Décrivons le système de racines, le groupe de Weyl et les paramètres associés à un triplet cuspidal dans le cas des groupes classiques. Ceci est complètement traité dans [Lus88, 2.13].

H	L	partition	R	R_{red}	paramètres
Sp_{2n}	$(\mathbf{C}^\times)^\ell \times \mathrm{Sp}_{2n'}$	$(1^\ell) \times (2, 4, \ldots, 2d)$	BC_ℓ	B_ℓ	2 2 2 2 $2d+1$
	$(\mathbf{C}^\times)^n$	(1^n)	C_n	C_n	2 2 2 2 2
SO_N	$(\mathbf{C}^\times)^\ell \times \mathrm{SO}_{N'}$	$(1^\ell) \times (1, 3, \ldots, 2d+1)$	B_ℓ	B_ℓ	2 2 2 2 $2d+2$
SO_{2n+1}	$(\mathbf{C}^\times)^n$	(1^n)	B_n	B_n	2 2 2 2 2
SO_{2n}	$(\mathbf{C}^\times)^n$	(1^n)	D_n	D_n	2 2 2 2 2 2

Remarque 3.10. Dans la table précédente, on suppose que $n' \neq 0$ et $N' \neq 0$.

3.5 Équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}(G)_{\mathfrak{s}}$ et $\mathrm{mod}(\mathcal{H}'_{\mathfrak{s}})$

On reprend les notations de la section 3.1. Bernstein a montré que pour tout $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$, la catégorie $\mathrm{Rep}(G)_{\mathfrak{s}}$ est équivalente à la catégorie des modules à droite sur $\mathrm{End}_G(\Pi_{\mathfrak{s}})$, où $\Pi_{\mathfrak{s}}$ est une certaine représentation de G.

À présent, on suppose que G est l'un des groupes $\mathrm{SO}_N(F)$ ou $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$. Dans [Hei11], Heiermann a « calculé » $\mathrm{End}_G(\Pi_{\mathfrak{s}})$, c'est-à-dire qu'il a montré que $\mathrm{End}_G(\Pi_{\mathfrak{s}})$ est isomorphe à un produit semi-direct d'une algèbre de Hecke affine par l'algèbre d'un certain groupe fini. De plus, dans [Hei10] il a explicité les paramètres de cette algèbre de Hecke en fonction des paramètres de Langlands de la représentation supercuspidale définissant la paire inertielle $\mathfrak{s}$. Rappelons brièvement sa démarche.

Soit $\mathfrak{s} = [M, \sigma]$ une paire inertielle de G et P un sous-groupe parabolique de Levi M. Notons A_M le tore maximal déployé dans le centre de M, $\mathfrak{a}_M = X_*(A_M) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ et $\mathfrak{a}_M^* = X^*(A_M) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, $\Sigma(A_M)$ l'ensemble des racines non triviales de A_M dans l'algèbre de Lie de G, $\Sigma(P) \subset \Sigma(A_M)$ le sous-ensemble des racines qui agissent dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de P et $\Sigma_{\text{red}}(P)$ l'ensemble des racines réduites de $\Sigma(P)$. Nous noterons $\mathcal{O}_\sigma$ l'orbite de σ sous l'action des caractères non-ramifiés de M, c'est-à-dire $\mathcal{O}_\sigma = \{\sigma \otimes \chi, \chi \in \mathfrak{X}(M)\}$ (c'est aussi le tore $T_{\mathfrak{s}}$).

Les groupes de Levi de G étant isomorphes à des produits de groupes linéaires et d'un groupe de même type que G, σ se décompose en produit tensoriel de représentations qu'on regroupe par orbite inertielle. On peut supposer que $M = \mathrm{GL}_{d_1}^{\ell_1} \times \ldots \times \mathrm{GL}_{d_r}^{\ell_r} \times G_{n'}$ et $\sigma = \sigma_{1,1} \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_{1,\ell_1} \boxtimes \sigma_{2,1} \boxtimes \ldots \sigma_{r,\ell_r} \boxtimes \tau$ avec

— pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ et pour tout $j \in [\![1,\ell_i]\!]$, $\sigma_{i,j}$ est une représentation irréductible supercuspidale de GL_{d_i} ;

— pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ et pour tout $j, j' \in [\![1,\ell_i]\!]$, $\mathcal{O}_{\sigma_{i,j}} = \mathcal{O}_{\sigma_{i,j'}}$;

— pour tout $i, i' \in [\![1,r]\!]$, pour tout $j \in [\![1,\ell_i]\!]$, $j' \in [\![1,\ell_{i'}]\!]$ et $i \neq i'$, $\mathcal{O}_{\sigma_{i,j}} \neq \mathcal{O}_{\sigma_{i',j'}}$;

— une représentation irréductible supercuspidale τ de $G_{n'}$.

Quitte à multiplier par des caractères non-ramifiés, on peut supposer que

$$\sigma = \underbrace{\sigma_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_1}_{\ell_1} \boxtimes \ldots \boxtimes \underbrace{\sigma_r \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_r}_{\ell_r} \boxtimes \tau,$$

avec σ_i une représentation irréductible supercuspidale de GL_{d_i}. À présent, si $\mathcal{O}_{\sigma_i} = \mathcal{O}_{\sigma_i^\vee}$, alors il existe un caractère non-ramifié de GL_{d_i}, $\chi = |\det(\cdot)|^{s_i}$ tel que $\sigma_i^\vee = \sigma_i \chi$. Notons $\chi^{1/2} = |\det(\cdot)|^{s_i/2}$, si bien que $(\sigma_i \chi^{1/2})^\vee = \sigma_i \chi^{1/2}$. Ainsi, quitte à faire les considérations précédentes et en conjuguant par un élément de $W_{\mathfrak{s}}$ si nécessaire, on peut supposer que les σ_i vérifient les conditions (C) suivantes :

(C)
- — pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, si $\mathcal{O}_{\sigma_i} = \mathcal{O}_{\sigma_i^\vee}$, alors $\sigma_i \simeq \sigma_i^\vee$;
- — pour tout $i, j \in [\![1,r]\!]$, si $i \neq j$, alors $\sigma_i \not\simeq \sigma_j$, $\sigma_i \not\simeq \sigma_j^\vee$
- — pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, ou bien il existe $s \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $\sigma_i|\ |^s \rtimes \tau$ est réductible, ou bien pour tout $s \in \mathbf{R}_{>0}$, $\sigma_i|\ |^s \rtimes \tau$ est irréductible.

On peut ainsi distinguer trois cas de figure :

(i) $\sigma_i \simeq \sigma_i^\vee$ et il existe $s \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\sigma_i|\ |^s \rtimes \tau$ est réductible ;

(ii) $\sigma_i \simeq \sigma_i^\vee$ et pour tout $s \in \mathbf{R}_+^*$, $\sigma_i|\ |^s \rtimes \tau$ est irréductible ;

(iii) $\sigma_i \not\simeq \sigma_i^\vee$.

La fonction μ d'Harish-Chandra ([Hei11, 1.2,1.3]) permet de définir un sous-ensemble de $\Sigma(A_M)$ qui forme un système de racines. Dans [Hei11, 1.13], Heiermann décrit explicitement les racines et le type du système de racines en fonction de la distinction de cas précédente. Enfin, en [Hei11, 6], en prenant en compte les caractères de « torsion », c'est-à-dire les élements de $\mathfrak{X}(M)(\sigma)$, il construit une donnée radicielle basée à partir des données précédentes, qu'on note $\mathcal{R}_{\mathcal{O}} = (\Lambda_{\mathcal{O}}, \Sigma_{\mathcal{O}}, \Lambda_{\mathcal{O}}^\vee, \Sigma_{\mathcal{O}}^\vee, \Delta_{\mathcal{O}})$ et des fonctions paramètres (dans le sens des algèbres de Hecke) qui sont définies directement à partir de la forme de la fonction μ, ou plus précisément des pôles de $\mu(\sigma \otimes \cdot)$ (voir [Hei11, 1.6]). Ces paramètres correspondent aux « points de réductibilités » de certaines induites paraboliques. Nous y reviendrons plus tard.

Par ailleurs, le tore associé au réseau $\Lambda_{\mathcal{O}}$ correspond à $T_{\mathfrak{s}}$ et $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est réunion de sous-systèmes de racines irréductibles Σ_i qui ne dépendent que de σ_i. On fixe $i \in [\![1,r]\!]$ et on considère σ_i. On obtient une description du type du système de racines Σ_i en fonction de la distinction de cas précédente

	Levi	(i)	(ii)	(iii)
SO_{2n+1}	$\prod_{j=1}^r \mathrm{GL}_{d_j}^{\ell_j} \times \mathrm{SO}_{2n'+1}$	B_{ℓ_i}	D_{ℓ_i}	A_{ℓ_i-1}
Sp_{2n}	$\prod_{i=j}^r \mathrm{GL}_{d_j}^{\ell_j} \times \mathrm{Sp}_{2n'}$	B_{ℓ_i}	D_{ℓ_i}	A_{ℓ_i-1}
	$\prod_{i=1}^r \mathrm{GL}_{d_i}^{\ell_i}$	C_{ℓ_i}	D_{ℓ_i}	A_{ℓ_i-1}
SO_{2n}	$\prod_{i=j}^r \mathrm{GL}_{d_j}^{\ell_j} \times \mathrm{SO}_{2n'}$	B_{ℓ_i}	D_{ℓ_i}	A_{ℓ_i-1}
	$\prod_{j=1}^r \mathrm{GL}_{d_j}^{\ell_j},\ k_i \geqslant 2$	C_{ℓ_i}	D_{ℓ_i}	A_{ℓ_i-1}
	$\prod_{j=1}^r \mathrm{GL}_{d_j}^{\ell_j}$		D_{ℓ_i}	A_{ℓ_i-1}

On peut décrire à présent plus précisément le groupe $W_{\mathfrak{s}}$. Soit $W_{\mathfrak{s}}^{\circ}$ le groupe de Weyl associé à $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ et $\Sigma_{\mathcal{O}}^{+}$ un système de racines positives (correspondant au choix de P). Posons $R_{\mathfrak{s}} = \{w \in W_{\mathfrak{s}}, w\Sigma_{\mathcal{O}}^{+} = \Sigma_{\mathcal{O}}^{+}\}$. On a alors

$$W_{\mathfrak{s}} = W_{\mathfrak{s}}^{\circ} \rtimes R_{\mathfrak{s}}.$$

De plus, le groupe $W_{\mathfrak{s}}^{\circ}$ est le produit direct des $W_{\mathfrak{s},i}^{\circ}$, avec $W_{\mathfrak{s},i}^{\circ}$ le groupe de Weyl associé au système de racines Σ_i défini par σ_i. Décrivons son action sur un élément $m \in M$. Écrivons $m = (m_{i,j})_{i\in[\![1,r]\!],j\in[\![1,\ell_i]\!]}$, pour tout $i \in [\![1,r]\!], j \in [\![1,\ell_i-1]\!]$, notons $s_{i,j} \in N_G(M)/M$ dont l'action sur m permute les éléments $m_{i,j}$ et $m_{i,j+1}$ et $s_{i,\ell_i} \in N_{G_*}(M)/M$ dont l'action sur m permute m_{i,ℓ_i} et ${}^{\tau}m_{i,\ell_i}^{-1}$.
Soit $i \in [\![1,r]\!]$. Alors $W_{\mathfrak{s},i}^{\circ}$ est engendré par :

$$W_{\mathfrak{s},i}^{\circ} = \begin{cases} \langle s_{i,j}, j \in [\![1,\ell_i]\!]\rangle & \text{si } \sigma_i \text{ vérifie (i)} \quad \text{groupe de Weyl de type } B_{\ell_i}/C_{\ell_i} \\ \langle s_{i,j}, j \in [\![1,\ell_i-1]\!],\ s_{i,\ell_i}s_{i,\ell_i-1}s_{i,\ell_i}^{-1}\rangle & \text{si } \sigma_i \text{ vérifie (ii)} \quad \text{groupe de Weyl de type } D_{\ell_i} \\ \langle s_{i,j}, j \in [\![1,\ell_i-1]\!]\rangle & \text{si } \sigma_i \text{ vérifie (iii)} \quad \text{groupe de Weyl de type } A_{\ell_i-1} \end{cases}$$

Décrivons le groupe $R_{\mathfrak{s}}$ (voir [Gol11, 1.5]). Pour cela, notons

$$\begin{aligned} C &= \{i \in [\![1,r]\!],\ \sigma_i \text{ vérifie (ii)}\}, \\ C_e &= \{i \in C,\ d_i \equiv 0 \mod 2\}, \\ C_o &= \{i \in C,\ d_i \equiv 1 \mod 2\}. \end{aligned}$$

Il vient alors

— si $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ ou $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$, alors

$$R_{\mathfrak{s}} = \prod_{i\in C} \langle r_i \rangle.$$

— si $G = \mathrm{SO}_{2n}$ et $M = \mathrm{GL}_{d_1}^{\ell_1} \times \ldots \times \mathrm{GL}_{d_r}^{\ell_r} \times \mathrm{SO}_{2n'}$ avec $n' \geqslant 2$, alors

$$R_{\mathfrak{s}} = \prod_{i\in C} \langle r_i \rangle.$$

— si $G = \mathrm{SO}_{2n}$ et $M = \mathrm{GL}_{d_1}^{\ell_1} \times \ldots \times \mathrm{GL}_{d_r}^{\ell_r}$, alors

$$R_{\mathfrak{s}} = \prod_{i\in C_e} \langle r_i \rangle \times \langle r_i r_j, i, j \in C_o \rangle.$$

Revenons sur les valeurs explicites des paramètres. Dans [Hei10], à l'aide des travaux de Bernstein et Zelevinsky d'une part et de Arthur et Mœglin d'autre part, Heiermann décrit explicitement les valeurs des fonctions paramètres en fonction du paramètre de Langlands de σ.

Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Notons t_i l'ordre du groupe $\mathfrak{X}(\mathrm{GL}_{d_i})(\sigma_i)$. Si σ_i est autoduale, soit ζ_i un caractère non-ramifié de GL_{d_i} tel que $\sigma_i\zeta_i$ soit autoduale, non isomorphe à σ_i et vérifie les conditions (C). Soit $x_i \in \mathbf{R}_+$ (resp. $x'_i \in \mathbf{R}_+$), l'unique réel positif tel que $\sigma_i|\ |^{x_i} \rtimes \tau$ (resp. $\sigma_i\zeta_i|\ |^{x'_i} \rtimes \tau$) soit réductible. On peut supposer que $x_i \geqslant x'_i$. Nous avons déjà vu que $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est réunion de composantes irréductibles Σ_i dont le type est déterminé par σ_i.

— Si Σ_i est de type A, C ou D, pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}} \cap \Sigma_i$,

$$\lambda_{\mathcal{O}}(\alpha) = 1.$$

— Si Σ_i est de type B, pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}} \cap \Sigma_i$ racine longue,

$$\lambda_{\mathcal{O}}(\alpha) = 1.$$

Si $\alpha_i \in \Delta_{\mathcal{O}} \cap \Sigma_i$ est la racine courte, alors

$$\lambda_{\mathcal{O}}(\alpha_i) = x_i + x'_i, \quad \lambda^*_{\mathcal{O}}(\alpha_i) = x_i - x'_i.$$

Soit φ_τ le paramètre de Langlands de la représentation supercuspidale τ. On rappelle que l'on note $\mathrm{Jord}(\varphi_\tau)$ le bloc de Jordan de φ_τ. S'il existe un entier $a \in \mathbf{N}$ tel que $(\pi, a) \in \mathrm{Jord}(\varphi_\tau)$, on notera $J_\pi = \{a \in \mathbf{N}, (\pi, a) \in \mathrm{Jord}(\varphi_\tau)\}$. D'après la classification des séries discrètes des groupes classiques de Mœglin, l'unique réel $x_i \in \mathbf{R}_+$ tel que $\sigma_i|\ |^{x_i} \rtimes \tau$ est réductible, vaut :

$$x_i = \begin{cases} \frac{a_{\sigma_i}+1}{2} & \text{avec } a_{\sigma_i} = \max J_{\sigma_i} \text{ si } J_{\sigma_i} \neq \emptyset \\ \frac{1}{2} & \text{si } J_{\sigma_i} \neq \emptyset \text{ et } \sigma_i \text{ de type opposé à } \widehat{G} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que si Σ_i est de type B et $\alpha_i \in \Delta_{\mathcal{O}} \cap \Sigma_i$ est la racine courte, alors $\lambda_{\mathcal{O}}(\alpha_i) + \lambda^*_{\mathcal{O}}(\alpha_i) = 2x_i = a_{\sigma_i} + 1$ et $\lambda_{\mathcal{O}}(\alpha_i) - \lambda^*_{\mathcal{O}}(\alpha_i) = 2x'_i = a'_{\sigma_i} + 1$.
On peut dès lors considérer l'algèbre de Hecke affine

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}}}^{\lambda_{\mathcal{O}}, \lambda^*_{\mathcal{O}}} = \bigotimes_{i=1}^{r} \mathcal{H}_i,$$

qui est le produit tensoriel d'algèbres de Hecke affines indexé par $i \in [\![1, r]\!]$ associé à chaque composantes irréductibles Σ_i de $\Sigma_{\mathcal{O}}$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, notons v_i l'indéterminée associée à $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}_i|_{v_i = q^{t_i/2}}$ l'algèbre obtenue par spécialisation de l'indéterminée v_i en $q^{t_i/2}$. Notons enfin

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{s}} = \bigotimes_{i=1}^{r} \mathcal{H}_i|_{v_i = q^{t_i/2}}.$$

On obtient enfin le théorème suivant

Théorème 3.11 (Heiermann,[Hei11, 7.7,7.8],[Hei12])**.** *Il y a une équivalence de catégories*

$$\mathrm{Rep}(G)_{\mathfrak{s}} \simeq \mathrm{mod}\left(\mathcal{H}_{\mathfrak{s}} \rtimes \mathbf{C}[R_{\mathfrak{s}}]\right).$$

De plus, cette équivalence de catégories préserve les objets tempérés et ceux de la série discrète.

Soit ζ un caractère non-ramifié **unitaire** de M. Nous avons vu dans la section 3.3 comment associer à une algèbre de Hecke affine, une algèbre de Hecke graduée. La fonction paramètre μ_ζ associée à $(\lambda_{\mathcal{O}}, \lambda^*_{\mathcal{O}})$ est définie de la façon suivante : pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O},\zeta}$,

$$\mu_\zeta(\alpha) = \begin{cases} 2\lambda_{\mathcal{O}}(\alpha) & \text{si } \alpha^\vee \notin 2\Lambda^\vee_{\mathcal{O}} \\ \lambda_{\mathcal{O}}(\alpha) + \lambda^*_{\mathcal{O}}(\alpha)\theta_{-\alpha}(\zeta) & \text{si } \alpha^\vee \in 2\Lambda^\vee_{\mathcal{O}} \end{cases}$$

Puisque $s_\alpha\zeta = \zeta$, $\theta_{-\alpha}(\zeta) = \pm 1$. Plus précisément,

$$\theta_{-\alpha}(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\sigma \otimes \zeta)^{s_\alpha} \simeq \sigma \otimes \zeta \\ -1 & \text{si } (\sigma \otimes \zeta)^{s_\alpha} \not\simeq \sigma \otimes \zeta \end{cases}$$

Le quintuplet $\mathcal{R}_{\mathcal{O},\zeta} = (\Lambda_{\mathcal{O}}, \Sigma_{\mathcal{O},\zeta}, \Lambda^\vee_{\mathcal{O}}, \Sigma^\vee_{\mathcal{O},\zeta}, \Delta_{\mathcal{O},\zeta})$ est une donnée radicielle basée et on peut considérer l'algèbre de Hecke graduée $\mathbb{H}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O},\zeta},\mu_\zeta} \rtimes \mathbf{C}[R_{\mathfrak{s},\zeta}]$.

On rappelle qu'on utilise les notations de la section 3.1 et on revient brièvement sur $\Lambda_{\mathcal{O}}$. C'est un sous-réseau d'indice fini de $\Lambda(G)$ tel que

$$\Lambda_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \twoheadrightarrow \Lambda_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}^\times \simeq \mathfrak{X}(M)/\mathfrak{X}(M)(\sigma).$$

On peut décomposer $\Lambda_{\mathcal{O}} = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{j=1}^{\ell_i} \Lambda_{i,j}$, où $\Lambda_{i,j}$ est un sous-réseau de $\Lambda(\mathrm{GL}_{d_i})$ d'indice t_i. Pour tout $\nu_{i,j} \in \Lambda_{i,j} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, notons $\varsigma_{i,j} = (\zeta_{i,j}\chi_{\nu_{i,j}}, q^{t_i/2})$, $\overline{\varsigma}_{i,j} = (\nu_{i,j}, t_i(\log q)/2)$, $\varsigma = (\varsigma_{i,j})$, $\overline{\varsigma} = (\overline{\varsigma}_{i,j})$. Soit $\omega = W_{\mathfrak{s}} \cdot \varsigma$ le caractère central de $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$ de partie elliptique dans l'orbite de ζ et $\overline{\omega}$ le caractère central hyperbolique correspondant.

D'après les résultats de Lusztig (théorème 3.8), on a une équivalence de catégories :

$$\mathrm{mod}\,(\mathcal{H}_{\mathfrak{s}} \rtimes \mathbf{C}[R_{\mathfrak{s}}])_\omega \simeq \mathrm{mod}\left(\mathbb{H}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O},\zeta},\mu_\zeta} \rtimes \mathbf{C}[R_{\mathfrak{s},\zeta}]\right)_{\overline{\omega}}.$$

En particulier,

$$\mathbf{Irr}(G)_\omega \simeq \mathbf{Irr}\,(\mathcal{H}_{\mathfrak{s}} \rtimes \mathbf{C}[R_{\mathfrak{s}}])_\omega \simeq \mathbf{Irr}\left(\mathbb{H}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O},\zeta},\mu_\zeta} \rtimes \mathbf{C}[R_{\mathfrak{s},\zeta}]\right)_{\overline{\omega}}.$$

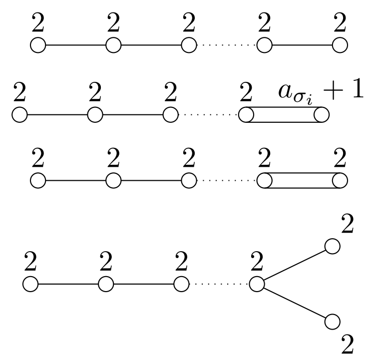
Les valeurs de la fonction paramètre μ_ζ se lisent sur les diagrammes suivants (il s'agit du diagramme de Dynkin associé à $\Sigma_{\mathcal{O},i,\zeta}$) :

A_{ℓ_i-1}

B_{ℓ_i}/C_{ℓ_i} — si $\sigma_i \in \mathrm{Jord}(\tau)$

B_{ℓ_i}/C_{ℓ_i} — si $\sigma_i \notin \mathrm{Jord}(\tau)$

D_n



Chapitre 4

Le centre de Bernstein stable

4.1 Centre de Bernstein stable, d'après Haines

On dispose de deux paramétrages des représentations irréductibles d'un groupe p-adique G. L'un par la théorie du centre de Bernstein, l'autre par la correspondance (conjecturale en général) de Langlands. Il n'y a pas de bonne compatibilité entre ces paramétrages. Nous voulons comprendre comment est relié le support cuspidal d'une représentation avec son paramètre de Langlands. Le but de cette partie est de construire l'analogue «galoisien» du centre de Bernstein, puis de le relier au centre de Bernstein via la correspondance de Langlands. Il y a plusieurs façons de voir le centre de Bernstein de G. On peut le voir d'une part, comme le centre de la catégorie des représentations lisses de G, ou d'autre part, comme une décomposition de cette catégorie suivant les paires inertielles, en sous-catégories et voir le centre de cette catégorie comme l'anneau des fonctions régulières du quotient d'un tore par l'action d'un groupe fini. On s'intéressera à construire l'analogue du tore et du groupe fini. Pour cela, on doit définir les analogues «galoisiens» d'une représentation supercuspidale, du tore des caractères non ramifiés d'un Levi, du groupe fini qui agit sur le tore et enfin du support cuspidal.

On rappelle une décomposition de l'ensemble des classes de paramètres de Langlands similaire à la décomposition de Bernstein. Pour cela, on suit l'article de Haines [Hai14] légèrement modifié.

Définition 4.1 ([Hai14, 5.1])**.** Soit $\phi : W'_F \longrightarrow \widehat{G}$ un paramètre de Langlands. Pour $w \in W_F$, on note $d_w = \mathrm{diag}(||w||^{1/2}, ||w||^{-1/2}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, avec $|| \cdot ||$ la valeur absolue définie pour tout $w \in W_F$ par $||w|| = q^{-\nu_F(w)}$ et $\nu_F : W_F \longrightarrow \mathbf{Z}$ la valuation qui envoie tout Frobenius géométrique sur 1.

On appelle cocaractère infinitésimal de G, la $\widehat{G}$-classe de conjugaison d'un paramètre de Langlands de la forme $\lambda : W_F \longrightarrow \widehat{G}$ et on le notera $(\lambda)_{\widehat{G}}$.

À tout paramètre de Langlands ϕ est associé un cocaractère infinitésimal de la manière suivante. On appelle

— partie semi-simple de ϕ, le morphisme $\phi^{\mathrm{ss}} : W_F \longrightarrow \widehat{G}$ défini pour tout $w \in W_F$ par $\phi^{\mathrm{ss}}(w) = \phi(w, d_w)$;

— cocaractère infinitésimal de ϕ, la $\widehat{G}$-classe de conjugaison de ϕ^{ss} et on la note $(\phi^{\mathrm{ss}})_{\widehat{G}}$.

Remarque 4.2. Telle qu'elle est définie ici, la partie semi-simple d'un paramètre de Langlands correspond à la restriction au groupe de Weil du paramètre de Langlands pour le groupe de Weil-Deligne « originel ». Nous reviendrons sur ce point dans la section 4.2.1

Soit $\phi : W'_F \longrightarrow \widehat{G}$ un paramètre de Langlands. On rappelle que d'après [Bor79, proposition 3.6] et sa preuve, un sous-groupe de Levi $\widehat{M}$ de $\widehat{G}$ contenant l'image de ϕ minimalement (parmi les sous-groupes de Levi de $\widehat{G}$) est unique à conjugaison par un élément de $Z_{\widehat{G}}(\operatorname{Im}\phi)^\circ$ près. De plus, si $\widehat{M}$ est un tel Levi, alors sa composante déployée (tore déployé maximal dans le centre) est un tore maximal de $Z_{\widehat{G}}(\operatorname{Im}\phi)$, et réciproquement, un tore maximal de $Z_{\widehat{G}}(\operatorname{Im}\phi)$ est une composante déployée d'un Levi de $\widehat{G}$ contenant $\operatorname{Im}\phi$ minimalement.

Soit M un sous-groupe de Levi de G et posons

$$\Lambda = \left(X^*(Z_{\widehat{M}})_{I_F}\right)^{\langle \mathrm{Fr}\rangle} = X^*\left(\left({Z_{\widehat{M}}}^{I_F}\right)_{\langle \mathrm{Fr}\rangle}\right).$$

Dans [Kot97], Kottwitz a défini un morphisme surjectif

$$\kappa_M : M \twoheadrightarrow \Lambda,$$

tel que M^1 (voir section 3.1) est le noyau du morphisme

$$M \twoheadrightarrow \Lambda/\Lambda_{\mathrm{tors}}.$$

Par suite, on obtient une bijection

$$\mathfrak{X}(M) \simeq \left(\left({Z_{\widehat{M}}}^{I_F}\right)_{\langle \mathrm{Fr}\rangle}\right)^\circ.$$

Ceci est compatible avec la correspondance de Langlands pour les caractères d'après [Kal12]. Lorsque G est déployé, on obtient donc une bijection entre les caractères non ramifiés de M et les paramètres de Langlands non ramifiés à valeurs dans $Z^\circ_{\widehat{M}}$ qui à un caractère non ramifié $\chi \in \mathfrak{X}(M)$ correspond à un paramètre $\widehat{\chi} : W_F/I_F \longrightarrow Z^\circ_{\widehat{M}}$. Dans la suite, si $\widehat{M}$ est un sous-groupe de Levi de $\widehat{G}$, on note $\mathfrak{X}(\widehat{M}) = Z^\circ_{\widehat{M}}$ et on l'identifie aux paramètres décrits précédemment.

Définition 4.3 ([Hai14, 5.3.3])**.** Appelons L-données cuspidales les couples $(\widehat{M}, \lambda)$ formés d'un sous-groupe de Levi $\widehat{M}$ de $\widehat{G}$ et de $\lambda : W_F \longrightarrow \widehat{M}$ un paramètre de Langlands discret de M. On dit alors que

(i) les L-données cuspidales $(\widehat{M}_1, \lambda_1)$ et $(\widehat{M}_2, \lambda_2)$ sont associées s'il existe $g \in \widehat{G}$ tel que ${}^g\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ et $\lambda_2 = {}^g\lambda_1$;

(ii) les L-données cuspidales $(\widehat{M}_1, \lambda_1)$ et $(\widehat{M}_2, \lambda_2)$ sont inertiellement équivalentes s'il existe $g \in \widehat{G}$ et $\chi \in \mathfrak{X}(\widehat{M}_2)$ tels que ${}^g\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ et $\lambda_2 = {}^g\lambda_1\chi$.

Une classe d'équivalence pour la relation (i) (resp. (ii)) est appelée support cuspidal (resp. support inertiel).

On note $\Omega(G)_{\mathrm{st}}$ (resp. $\mathcal{B}(G)_{\mathrm{st}}$) l'ensemble des classes de données L-données cuspidales (resp. de classes inertielles). Comme pour $\Omega(G)$, l'ensemble $\Omega(G)_{\mathrm{st}}$ est muni d'une structure de variété algébrique dont les composantes connexes sont indexées par $\mathcal{B}(G)_{\mathrm{st}}$ et sont des quotients de tores complexes par l'action de groupes finis. On a de même une décomposition de l'ensemble (des classes) de morphismes admissibles de $\widehat{G}$:

$$\Phi(G) = \bigsqcup_{\imath \in \mathcal{B}(G)_{\mathrm{st}}} \Phi(G)_{\imath},$$

où $\Phi(G)_{\imath}$ désigne l'ensemble des classes de morphismes admissibles dont le cocaractère infinitésimal est dans $\imath$.

Pour être plus précis, si $\imath = [\widehat{M}, \lambda]_{\widehat{G}}$, on a $\phi \in \Phi(G)_{\imath}$ si et seulement si, il existe $\chi \in \mathfrak{X}(\widehat{M})$ tels que $(\phi^{\mathrm{ss}})_{\widehat{G}} = (\lambda\chi)_{\widehat{G}}$. On notera aussi $\Phi(G)_{\lambda}$ l'ensemble des paramètres ayant pour cocaractère infinitésimal λ.

Soit $\imath = [\widehat{M}, \lambda]_{\widehat{G}}$ une paire inertielle de $\widehat{G}$. Le tore associé à cette paire inertielle est

$$\mathcal{T}_{\imath} = \left\{ (\lambda\chi)_{\widehat{M}}, \, \chi \in \mathfrak{X}(\widehat{M}) \right\}.$$

Ce dernier a une structure de tore complexe via la bijection $\mathcal{T}_{\imath} \simeq \mathfrak{X}(\widehat{M})/\mathfrak{X}(\widehat{M})(\lambda)$, où $\mathfrak{X}(\widehat{M})(\lambda)$ est l'ensemble fini des cocaractères non ramifiés $\chi \in \mathfrak{X}(\widehat{M})$ tels que $(\lambda)_{\widehat{M}} = (\lambda\chi)_{\widehat{M}}$. Le groupe de Weyl fini associé à cette paire inertielle est le sous-groupe du groupe de Weyl de $\widehat{M}$ dans $\widehat{G}$ stabilisant $\imath$, c'est-à-dire

$$\mathcal{W}_{\imath} = \left\{ w \in N_{\widehat{G}}(\widehat{M})/\widehat{M}, \ \exists \chi \in \mathfrak{X}(\widehat{M}), ({}^{w}\lambda)_{\widehat{M}} = (\lambda\chi)_{\widehat{M}} \right\}.$$

L'ensemble des caractères infinitésimaux dans $\imath$ s'identifie au quotient $\mathcal{T}_{\imath}/\mathcal{W}_{\imath}$.

Définition 4.4 ([Hai14, p.15])**.** On appelle centre de Bernstein stable de G et on note $\mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{st}}$ l'anneau des fonctions régulières sur $\Omega(G)_{\mathrm{st}}$:

$$\mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{st}} = \mathbf{C}[\Omega(G)_{\mathrm{st}}].$$

Expliquons rapidement la terminologie « stable ». Ce qui suit n'a rien d'original et est (presque) l'exacte traduction des explications qu'on retrouve dans [Vog93], [Hai14] et [SS13]. Tout d'abord, supposons la correspondance de Langlands locale pour G et pour tous ses sous-groupes de Levi. Soit $(L, \sigma) \in \Omega(G)$. Rappelons qu'on note $\mathrm{rec}_L(\sigma) : W'_F \longrightarrow \widehat{L}$ le paramètre de Langlands de σ. Notons $\widehat{M}$ un sous-groupe de Levi de $\widehat{G}$ qui contient minimalement l'image de $\lambda_{\sigma} = \mathrm{rec}_L(\sigma)^{\mathrm{ss}}$ (ils sont conjugués par $Z_{\widehat{G}}(\lambda_{\sigma})^{\circ}$). On définit ainsi une application

$$\mathrm{rec}^{\mathrm{st}}_{\Omega(G)} : \begin{array}{ccc} \Omega(G) & \longrightarrow & \Omega(G)_{\mathrm{st}} \\ (L, \sigma) & \longmapsto & (\widehat{M}, \lambda_{\sigma}) \end{array}$$

On conjecture ([Vog93, 7.18], [Hai14, 5.5.2], [SS13, 6.3]) que $\mathrm{rec}^{\mathrm{st}}_{\Omega(G)}$ est un morphisme fini de variétés algébriques (surjectif si G est quasi-déployé, ce que nous avons supposé) et que l'application induite $\mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{st}} \longrightarrow \mathfrak{Z}(G)$ a la propriété suivante : si $f \in \mathcal{C}^{\infty}_c(G)$ (espace des fonctions sur G localement constantes, à support compact et à valeurs complexes) est telle que ses intégrales orbitales stables s'annulent aux éléments semi-simples, alors pour tout $z^{\mathrm{st}} \in \mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{st}}$ d'image $z \in \mathfrak{Z}(G)$, le produit de convolution $z * f \in \mathcal{C}^{\infty}_c(G)$ a la même propriété.

Soit $\phi : W'_F \longrightarrow \widehat{G}$ un paramètre de Langlands tempéré. Pour tout $\pi \in \Pi_{\phi}(G)$, notons $\eta_{\pi} \in \mathbf{Irr}(\mathcal{S}^{G}_{\phi})$ la représentation correspondante. On conjecture que la distribution

$$SO_{\phi} = \sum_{\pi \in \Pi_{\phi}(G)} \dim(\eta_{\pi}) \mathrm{tr}(\pi),$$

est stable. Plus généralement, c'est-à-dire dans le cas non-tempéré, Vogan conjecture qu'on peut définir des distributions stables de la forme

$$SO = \sum_{\pi} a_\pi \mathrm{tr}(\pi),$$

où a_π est un entier non-nul pour un nombre fini de représentations irréductibles π qui ont tous le même cocaractère infinitésimal λ. Soit $z_{\mathrm{st}} \in \mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{st}}$ et $z \in \mathfrak{Z}(G)$ correspondant. Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on a

$$SO(z * f) = z_{st}(\lambda) SO(f).$$

Conjecture 4.5 (Vogan [Vog93, 7.18], Haines [Hai14, 5.2.2])**.** *Soit M un sous-groupe de Levi de G, σ une représentation irréductible supercuspidale de M et π un sous-quotient irréductible de $i_P^G(\sigma)$, avec P un sous-groupe parabolique de G de Levi M et i_P^G le foncteur d'induction parabolique normalisée. La correspondance de Langlands pour M (resp. pour G) associe à σ (resp. π) un paramètre $\phi_\sigma : W_F' \longrightarrow \widehat{M}$ (resp. $\phi_\pi : W_F' \longrightarrow \widehat{G}$). À $\widehat{G}$-conjugaison près, on a un plongement naturel $\widehat{M} \hookrightarrow \widehat{G}$ et on peut pousser en avant $\phi_\sigma : W_F' \longrightarrow \widehat{M} \hookrightarrow \widehat{G}$. La correspondance de Langlands devrait être compatible avec l'égalité des cocaractères infinitésimaux suivante*

$$(\phi_\pi^{\mathrm{ss}})_{\widehat{G}} = (\phi_\sigma^{\mathrm{ss}})_{\widehat{G}}.$$

Ceci implique que le cocaractère infinitésimal de ϕ_π ne dépend que du support cuspidal de π. Bien que σ soit supercuspidale, la restriction à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ de ϕ_σ n'est pas nécessairement triviale. Cette situation n'arrive pas pour $\mathrm{GL}_n(F)$ et $\mathrm{SL}_n(F)$ mais dans $\mathrm{GSp}_4(F), \mathrm{Sp}_4(F)$ et $\mathrm{SO}_5(F)$ il y a de telles représentations supercuspidales. Donnons un exemple d'une telle situation.

Exemple 4.6. Considérons le paramètre $\phi = S_2 \oplus \zeta \boxtimes S_2$ de $\mathrm{GSp}_4(F)$, où ζ est un caractère quadratique de W_F et S_2 la représentation irréductible de dimension 2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Il définit un L-paquet constitué d'une représentation de carré intégrable modulo le centre (notée $\delta([\zeta, \nu\zeta], \nu^{-1/2})$ dans [ST93] et qui est un sous-quotient irréductible de l'induite $\nu\zeta \times \zeta \rtimes \nu^{-1/2}$) et d'une représentation supercuspidale de $\mathrm{GSp}_4(F)$ cf. [GT11, p.1876] et [RS07, Table A.7]

Définition 4.7 ([Hai14, 5.1 & 5.3.3])**.** Soit $\imath = [\widehat{M}, \lambda]_{\widehat{G}}$ une paire inertielle. On appelle paquet infinitésimal (ou classe infinitésimale selon Haines) la réunion des L-paquets de paramètres admettant λ pour cocaractère infinitésimal et on note

$$\widetilde{\Pi}_\lambda(G) = \bigsqcup_{\phi \in \Phi(G)_\lambda} \Pi_\phi(G).$$

On appelle paquet inertiel de $\imath$ la réunion des paquets suivant

$$\widetilde{\Pi}_\imath(G) = \bigsqcup_{\chi \in \mathcal{T}_\imath / \mathcal{W}_\imath} \widetilde{\Pi}_{\lambda\chi}(G).$$

Soit (M, σ) une donnée cuspidale de G. La classe des sous-quotients irréductibles de $i_P^G(\sigma)$, où P est un sous-groupe parabolique de G admettant M pour Levi, ne dépend pas du choix de P. Il est donc licite de noter $\mathcal{JH}(i_P^G(\sigma))$ l'ensemble de ces sous-quotients irréductibles. Par ailleurs, si L est un sous-groupe de Levi de G, notons $\Phi(L)_{\mathrm{cusp}}$ l'ensemble des paramètres de Langlands de L dont le L-paquet contient des représentations supercuspidales de L. On ajoutera λ en indice pour signifier que l'on impose aux paramètres de Langlands d'admettre λ pour cocaractère infinitésimal. Pour $\phi \in \Phi(L)_{\mathrm{cusp}}$, on notera $\Pi_\phi(L)_{\mathrm{cusp}} = \Pi_\phi(L) \cap \mathbf{Irr}(L)_{\mathrm{cusp}}$. En général, si le cocaractère infinitésimal λ est fixé, il y a peu de sous-groupe de Levi L de G tel que $\Phi(L)_{\lambda,\mathrm{cusp}}$ soit non vide. On notera $\mathcal{L}(G)_\lambda$ l'ensemble des (classes de) sous-groupes de Levi $\widehat{L}$ de $\widehat{G}$, à $\widehat{G}$-conjugaison près, tel que $\Phi(L)_{\lambda,\mathrm{cusp}}$ soit non vide. La conjecture de compatibilité 4.5 est équivalente à dire que le paquet infinitésimal défini par λ est constitué des sous-quotients irréductibles des induites de représentations supercuspidales dont les paramètres de Langlands admettent λ pour cocaractère infinitésimal. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 4.8. *La conjecture de compatibilité de la correspondance de Langlands pour G avec l'induction parabolique (conjecture 4.5) est équivalente à ce que pour tout sous-groupe de Levi $\widehat{M}$ de $\widehat{G}$, pour tout cocaractère infinitésimal discret $\lambda : W_F \longrightarrow \widehat{M}$, on a :*

$$\widetilde{\Pi}_\lambda(G) = \bigsqcup_{\widehat{L}\in\mathcal{L}(G)_\lambda} \bigsqcup_{\phi\in\Phi(L)_{\lambda,\mathrm{cusp}}} \bigsqcup_{\pi\in\Pi_\phi(L)_{\mathrm{cusp}}} \mathcal{JH}(i_{LU}^G(\pi)).$$

De plus, on conjecture que si $\psi : W_F' \longrightarrow \widehat{L}$ est un paramètre de Langlands discret, trivial sur $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, alors le L-paquet $\Pi_\psi(L)$ n'est constitué que de représentations supercuspidales de L (voir par exemple [Ree12, Conjecture 6.1.4)]). Ceci impliquerait alors que toutes les représentations dans le L-paquets $\Pi_\lambda(M)$ sont supercuspidales et donc

$$\widetilde{\Pi}_\lambda(G) \supseteq \bigsqcup_{\sigma\in\Pi_\lambda(M)} \mathcal{JH}(i_P^G(\sigma)).$$

Un L-paquet $\Pi_\phi(G)$ étant paramétré par les représentations irréductibles du groupe fini $\mathcal{S}_\phi^G$, il faut déterminer quelles représentations de ce groupe vont paramétrer les représentations supercuspidales via la correspondance de Langlands. C'est l'objet des sections suivantes.

4.2 Centre de Bernstein stable complet

La correspondance de Langlands prédit un paramétrage d'un paquet $\Pi_\phi(G)$ par les représentations irréductibles du groupe fini $\mathcal{S}_\phi^G$, qui est essentiellement le groupe des composantes du centralisateur de l'image ϕ. On veut relier le support cuspidal des représentations d'un paquet $\Pi_\phi(G)$ aux représentations de $\mathcal{S}_\phi^G$. Commençons par un petit lemme utile.

Lemme 4.9. *Soit H un groupe algébrique complexe non nécessairement connexe et $X \subset H^\circ$ une partie de sa composante neutre. Alors $Z_H(X)^\circ = Z_{H^\circ}(X)^\circ$.*

Démonstration. Puisque $Z_H(X)^\circ$ est un groupe connexe de H, il est contenu dans H° ; si bien que $Z_H(X)^\circ \subseteq Z_{H^\circ}(X)$. Toujours par connexité, on obtient $Z_H(X)^\circ \subseteq Z_{H^\circ}(X)^\circ$. L'autre inclusion étant évidente, on a l'égalité. □

Avec les notations du lemme, nous noterons $A_H(X) = Z_H(X)/Z_H(X)^\circ = Z_H(X)/Z_{H^\circ}(X)^\circ$ le groupe des composantes du centralisateur de X dans H. De plus, comme H° est un sous-groupe distingué de H, il s'en suit que $A_{H^\circ}(X)$ est aussi un sous-groupe distingué de $A_H(X)$.

Soit L un sous-groupe de Levi de G et $\varphi : W_F' \longrightarrow \widehat{L}$ un paramètre de Langlands de L discret. Définissons

$$\mathcal{Z}_\varphi^L = Z_{\widehat{L}}/Z_{\widehat{L}} \cap Z_{\widehat{L}}(\varphi)^\circ \quad \text{et} \quad H_\varphi^L = Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F}).$$

Pour alléger les notations, nous noterons $A_{\widehat{L}}(\varphi)$ (resp. $A_{H^L_\varphi}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$) au lieu de $A_{\widehat{L}}(\operatorname{Im}\varphi)$ (resp. $A_{H^L_\varphi}(\operatorname{Im}\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$). On a l'égalité remarquable suivante

$$\begin{aligned} Z_{\widehat{L}}(\varphi) &= Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F}, \varphi_{|\mathrm{SL}_2}) \\ &= Z_{Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F})}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2}) \\ &= Z_{H^L_\varphi}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2}) \end{aligned}$$

Ainsi, $A_{\widehat{L}}(\varphi) = A_{H^L_\varphi}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$ et $A_{(H^L_\varphi)^\circ}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$ est un sous-groupe distingué de ce dernier. Considérons la suite exacte

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathcal{Z}^L_\varphi \arrow[r] & A_{H^L_\varphi}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2}) \arrow[r, "p"] & \mathcal{S}^L_\varphi \arrow[r] & 1 \\ & & A_{(H^L_\varphi)^\circ}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2}) \arrow[u, hook] & & \end{tikzcd}$$

On peut donc voir une représentation de $\mathcal{S}^L_\varphi$ comme une représentation de $A_{\widehat{L}}(\varphi)$ triviale sur $\mathcal{Z}^L_\varphi$. Soit ε une représentation irréductible de $\mathcal{S}^L_\varphi$ et notons $\widetilde{\varepsilon} = p^*\varepsilon$ la représentation irréductible de $A_{\widehat{L}}(\varphi)$ obtenue en tirant en arrière ε.

Proposition 4.10. *Soit* $u_\varphi = \varphi\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \in (H^L_\varphi)^\circ$. *Alors* $Z_{H^L_\varphi}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$ *est un sous-groupe réductif maximal de* $Z_{H^L_\varphi}(u_\varphi)$. *En particulier, on a :*

$$A_{H^L_\varphi}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2}) \simeq A_{H^L_\varphi}(u_\varphi).$$

Ceci est bien connu lorsque H^L_φ est connexe et la preuve dans le cas non connexe est identique. Rappelons là brièvement.

Démonstration. D'après un théorème de Kostant [CG10, proposition 3.7.3 & 3.7.23], le radical unipotent U de $Z_{H^L_\varphi}(u_\varphi)^\circ = Z_{(H^L_\varphi)^\circ}(u_\varphi)^\circ$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des $\mathfrak{sl}_2$-triplets contenant $\log u_\varphi \in \mathrm{Lie}(H^L_\varphi)$ ou de façon équivalente, sur l'ensemble J des morphismes algébriques

$$\gamma : \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \longrightarrow H^L_\varphi \text{ tels que } \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = u_\varphi.$$

Par suite, si $z \in Z_{H^L_\varphi}(u_\varphi)$, alors ${}^z\varphi_{|\mathrm{SL}_2} \in J$. Il existe donc un unique élément $v \in U$ tel que ${}^{vz}\varphi_{|\mathrm{SL}_2} = \varphi_{|\mathrm{SL}_2}$. D'après [Kot84, lemme 10.1.1], $(H^L_\varphi)^\circ$ est un groupe réductif, donc $Z_{(H^L_\varphi)^\circ}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})^\circ$ l'est aussi. Puisque U est un sous-groupe connexe de $(H^L_\varphi)^\circ$, on a $U \cap Z_{H^L_\varphi}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2}) \subseteq U \cap Z_{(H^L_\varphi)^\circ}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})^\circ = \{1\}$. Par ce qui précède, $Z_{H^L_\varphi}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$ est un sous-groupe réductif maximal de $Z_{H^L_\varphi}(u_\varphi)$, donc $A_{H^L_\varphi}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2}) \simeq A_{H^L_\varphi}(u_\varphi)$. $\square$

Définition 4.11. Soit $\varphi \in \Phi(L)$ un paramètre **discret** et $\varepsilon \in \mathbf{Irr}(\mathcal{S}^L_\varphi)$. On note $S_{u,v}$ la représentation définie en 1.2 pour $H = (H^L_\varphi)^\circ$. On garde les notations précédentes, et $\widetilde{\varepsilon}$ désigne la représentation irréductible de $A_{\widehat{L}}(\varphi) \simeq A_{H^L_\varphi}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2}) \simeq A_{H^L_\varphi}(u_\varphi)$ triviale sur $\mathcal{Z}^L_\varphi$ obtenue à partir de ε. On dira que ε est cuspidale si l'une des conditions équivalentes suivante est vérifiée :

(i) pour tout sous-groupe de Levi propre M de $(H_\varphi^L)^\circ$ et pour tout élément unipotent $v \in M$,

$$\mathrm{Hom}_{(H_\varphi^L)^\circ}(\widetilde{\varepsilon}\big|_{A_{(H_\varphi^L)^\circ}(u_\varphi)}, S_{u_\varphi,v}) = 0;$$

(ii) pour toute sous-représentation irréductible τ de $\widetilde{\varepsilon}\big|_{A_{(H_\varphi^L)^\circ}(u_\varphi)}$, $(\mathcal{C}_{u_\varphi}^{(H_\varphi^L)^\circ}, \tau)$ est une paire cuspidale ;

(iii) pour une sous-représentation irréductible τ de $\widetilde{\varepsilon}\big|_{A_{(H_\varphi^L)^\circ}(u_\varphi)}$, $(\mathcal{C}_{u_\varphi}^{(H_\varphi^L)^\circ}, \tau)$ est une paire cuspidale ;

On notera $\mathbf{Irr}(\mathcal{S}_\varphi^L)_{\mathrm{cusp}}$ l'ensemble des représentations irréductibles cuspidales dans le sens défini précédemment.

Démonstration (de la cohérence de la définition). L'équivalence entre ces trois conditions résultent des faits suivants. Tout d'abord,

$$\widetilde{\varepsilon}\big|_{A_{(H_\varphi^L)^\circ}(u_\varphi)} = \bigoplus_{x \in A_{H_\varphi^L}(u_\varphi)/A_{H_\varphi^L}(u_\varphi)^\tau} \tau^x \boxtimes \mathbf{C}^d,$$

où τ est une représentation irréductible de $A_{(H_\varphi^L)^\circ}(u_\varphi)$ et $A_{H_\varphi^L}(u_\varphi)^\tau = \{a \in A_{H_\varphi^L}(u_\varphi), \tau^a \simeq \tau\}$. De plus, pour tout $x \in A_{H_\varphi^L}(u_\varphi)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A_{(H_\varphi^L)^\circ}(u_\varphi)}(\tau, S_{u,v}) &\simeq \mathrm{Hom}_{A_{(H_\varphi^L)^\circ}(u_\varphi)}(\tau^x, S_{u,v}^x) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{A_{(H_\varphi^L)^\circ}(u_\varphi)}(\tau^x, S_{u,xvx^{-1}}),\end{aligned}$$

où $S_{u,xvx^{-1}}$ désigne la représentation de $A_{(H_\varphi^L)^\circ}(u_\varphi)$ relativement au sous-groupe de Levi ${}^xM$. □

Définition 4.12. Soit $\varphi \in \Phi(L)$ un paramètre de Langlands de L **discret**. On dit que φ est cuspidal si $\mathbf{Irr}(\mathcal{S}_\varphi^L)_{\mathrm{cusp}}$ est non vide.

Conjecture 4.13. *Soit $\varphi : W_F' \longrightarrow \widehat{G}$ un paramètre de Langlands de G cuspidal. Alors le L-paquet $\Pi_\varphi(G)$ contient des représentations supercuspidales de G et elles sont paramétrées par $\mathbf{Irr}(\mathcal{S}_\varphi^G)_{\mathrm{cusp}}$. Autrement dit, il existe une bijection :*

$$\Pi_\varphi(G)_{\mathrm{cusp}} \simeq \mathbf{Irr}(\mathcal{S}_\varphi^G)_{\mathrm{cusp}}.$$

On se propose de décrire la forme des paramètres de Langlands cuspidaux dans les cas du groupe linéaire, symplectique et spécial orthogonal. On rappelle qu'on note I_O (resp. I_S) un certain ensemble de représentations irréductibles de W_F de type orthogonal (resp. symplectique).

Proposition 4.14. *Pour un groupe linéaire, symplectique déployé ou spécial orthogonal déployé, les paramètres de Langlands cuspidaux (définition 4.12) sont :*

— *pour* $\mathrm{GL}_n(F)$,

$$\varphi : W_F \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}),\ \textit{irréductible};$$

— *pour* $\mathrm{SO}_{2n+1}(F)$,

$$\varphi = \bigoplus_{\pi \in I_O} \bigoplus_{a=1}^{d_\pi} \pi \boxtimes S_{2a} \bigoplus_{\pi \in I_S} \bigoplus_{a=1}^{d_\pi} \pi \boxtimes S_{2a-1},\ \forall \pi \in I_O, d_\pi \in \mathbf{N},\ \forall \pi \in I_S, d_\pi \in \mathbf{N}^*;$$

— *pour* $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ *ou* $\mathrm{SO}_{2n}(F)$,

$$\varphi = \bigoplus_{\pi\in I_S}\bigoplus_{a=1}^{d_\pi}\pi\boxtimes S_{2a}\bigoplus_{\pi\in I_O}\bigoplus_{a=1}^{d_\pi}\pi\boxtimes S_{2a-1}\ \forall\pi\in I_O, d_\pi\in\mathbf{N}^*,\ \forall\pi\in I_S, d_\pi\in\mathbf{N}.$$

De plus, d'après les théorèmes de Harris-Taylor et Henniart pour le groupe linéaire et le théorème de Mœglin, les représentations supercuspidales de G sont paramétrées par (φ,ε) avec φ un paramètre de Langlands cuspidal de G et $\varepsilon\in\mathbf{Irr}(\mathcal{S}_\varphi^G)_{\mathrm{cusp}}$. Autrement dit, la conjecture 4.13 est vraie.

Soit $\varphi : W_F' \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ un paramètre cuspidal de $G=\mathrm{GL}_n(F)$. Écrivons la décomposition en composante isotypique de la restriction à W_F de φ,

$$\varphi_{|W_F} = \bigoplus_{\pi\in I}\pi\boxtimes M_\pi.$$

D'où,

$$\begin{aligned} H_\varphi^G &= Z_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})}(\varphi_{|W_F}) \\ &= \prod_{\pi\in I}\mathrm{GL}_{m_\pi}(\mathbf{C}). \end{aligned}$$

On peut donc écrire $u_\varphi = \prod_{\pi\in I}u_\pi$, avec $u_\pi\in\mathrm{GL}_{m_\pi}(\mathbf{C})$ et se ramener à un étudier un seul facteur pour l'existence d'une paire cuspidale. Or, d'après la classification des paires cuspidales (voir table 1.2), ceci est équivalent au fait que pour tout $\pi\in I$, $m_\pi=1$ et $u_\pi=1$. D'où $Z_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})}(\varphi)=\prod_{\pi\in I}\mathrm{GL}_1(\mathbf{C})$. À présent, la discrétion du paramètre impose que $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))^\circ = \mathrm{GL}_1(\mathbf{C})$ soit un tore maximal de $Z_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})}(\varphi)$, par suite I est un singleton et $Z_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})}(\varphi)=\mathrm{GL}_1(\mathbf{C})$.

Ceci montre que, φ est un paramètre cuspidal de GL_n, si et seulement si, φ est un paramètre de Langlands discret trivial sur $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

Soit $\varphi : W_F' \longrightarrow \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})$ un paramètre cuspidal de $G=\mathrm{SO}_{2n+1}(F)$. Écrivons la décomposition en composantes isotypiques de la restriction à W_F de φ,

$$\varphi_{|W_F} = \bigoplus_{\rho\in I_O}\pi\boxtimes M_\pi\bigoplus_{\pi\in I_S}\pi\boxtimes M_\pi\bigoplus_{\pi\in I_{GL}}(\pi\oplus\pi^\vee)\boxtimes M_\pi.$$

Ainsi,

$$H_\varphi^G = \prod_{\pi\in I_O}\mathrm{Sp}_{m_\pi}(\mathbf{C})\times\prod_{\pi\in I_S}\mathrm{O}_{m_\pi}(\mathbf{C})\times\prod_{\pi\in I_{GL}}\mathrm{GL}_{m_\pi}(\mathbf{C}).$$

D'après la classification des paires cuspidales (table 1.2), on obtient les conditions suivantes :

— pour $\pi\in I_O$, $m_\pi=d_\pi(d_\pi+1)$, $d_\pi\in\mathbf{N}$;

— pour $\pi\in I_S$, $m_\pi=d_\pi^2$, $d_\pi\in\mathbf{N}^*$;

— pour $k\in I_{GL}$, $m_\pi=1$.

De plus, φ est nécessairement de la forme (on rappelle que S_d désigne la représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ de dimension d),

$$\varphi = \bigoplus_{\pi\in I_O}\bigoplus_{a=1}^{d_\pi}\pi\boxtimes S_{2a}\bigoplus_{\pi\in I_S}\bigoplus_{a=1}^{d_\pi}\pi\boxtimes S_{2a-1}\bigoplus_{\pi\in I_{GL}}(\pi\oplus\pi^\vee).$$

Par suite, on trouve

$$Z_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})}(\varphi) = \prod_{\pi \in I_O} \prod_{a=1}^{d_\pi} (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \prod_{\pi \in I_S} \prod_{a=1}^{d_\pi} (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \prod_{\pi \in I_{GL}} \mathrm{GL}_1(\mathbf{C}).$$

Puisque φ est discret, $Z^\circ_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})} = \{1\}$ est un tore maximal de $Z_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})}(\varphi)$. Par suite, I_{GL} est vide et donc

$$Z_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})}(\varphi) = \prod_{\pi \in I_O \sqcup I_S} (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{d_\pi},$$

et

$$\varphi = \bigoplus_{\pi \in I_O} \bigoplus_{a=1}^{d_\pi} \pi \boxtimes S_{2a} \bigoplus_{\pi \in I_S} \bigoplus_{a=1}^{d_\pi} \pi \boxtimes S_{2a-1}.$$

Écrivons le bloc de Jordan correspondant à ce paramètre de Langlands

$$\mathrm{Jord}(\varphi) = \{(\pi,2),\ldots,(\pi,2d_\pi-2),(\pi,2d_\pi),\pi \in I_O\} \sqcup \{(\pi,1),\ldots,(\pi,2d_\pi-3),(\pi,2d_\pi-1),\pi \in I_S\}.$$

Ainsi, $\mathrm{Jord}(\varphi)$ est sans trou et de plus, nous avons décrit à la suite de la table 1.2 les caractères cuspidaux. Ceux-ci correspondent exactement aux caractères alternées dans le sens du théorème de Mœglin 2.5. Réciproquement, un bloc de Jordan sans trou correspond à ces partitions d'unipotents dans Sp_{m_π} et SO_{m_π} et les caractères alternées à ces caractères cuspidaux.

Ici, G désignera soit $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$, auquel cas on pose $N = 2n+1$, soit $\mathrm{SO}_{2n}(F)$, auquel cas on pose $N = 2n$.
Soit $\varphi : W'_F \longrightarrow \mathrm{SO}_N(\mathbf{C})$ un paramètre cuspidal de G. Comme précédemment, écrivons la décomposition en composantes isotypiques de la restriction à W_F de

$$\varphi_{|W_F} = \bigoplus_{\pi \in I_O} \pi \boxtimes M_\pi \bigoplus_{\pi \in I_S} \pi \boxtimes M_\pi \bigoplus_{\pi \in I_{GL}} (\pi \oplus \pi^\vee) \boxtimes M_\pi.$$

Ainsi,

$$H^G_\varphi = \left(\prod_{\pi \in I_O} \mathrm{O}_{m_\pi}(\mathbf{C})\right)^+_\varphi \times \prod_{\pi \in I_S} \mathrm{Sp}_{m_\pi}(\mathbf{C}) \times \prod_{\pi \in I_{GL}} \mathrm{GL}_{m_\pi}(\mathbf{C})$$

$$(H^G_\varphi)^\circ = \prod_{\pi \in I_O} \mathrm{SO}_{m_\pi}(\mathbf{C}) \times \prod_{\pi \in I_S} \mathrm{Sp}_{m_\pi}(\mathbf{C}) \times \prod_{\pi \in I_{GL}} \mathrm{GL}_{m_\pi}(\mathbf{C}).$$

D'après la classification des paires cuspidales (table 1.2), on obtient les conditions suivantes :

— pour $\pi \in I_O$, $m_\pi = d_\pi^2$, $d_\pi \in \mathbf{N}^*$;

— pour $\pi \in I_S$, $m_\pi = (d_\pi+1)d_\pi$, $d_\pi \in \mathbf{N}$;

— pour $k \in I_{GL}$, $m_\pi = 1$.

De plus, φ est nécessairement de la forme,

$$\varphi = \bigoplus_{\pi \in I_O} \bigoplus_{a=1}^{d_\pi} \pi \boxtimes S_{2a-1} \bigoplus_{\pi \in I_S} \bigoplus_{a=1}^{d_\pi} \pi \boxtimes S_{2a} \bigoplus_{\pi \in I_{GL}} (\pi \oplus \pi^\vee).$$

Par suite, on trouve

$$Z_{\mathrm{O}_N(\mathbf{C})}(\varphi) = \prod_{\pi\in I_O}\prod_{a=1}^{d_\pi}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \prod_{\pi\in I_S}\prod_{a=1}^{d_\pi}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \prod_{k\in I_{GL}} \mathrm{GL}_1(\mathbf{C}).$$

Notons $Z_\varphi^+ = \left\{(\varepsilon_{\pi,a}) \in \prod_{\pi\in I_O}\prod_{a=1}^{d_\pi}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}),\ \prod_{\pi\in I_O}\prod_{a=1}^{d_\pi}\varepsilon_{\pi,a}^{\dim V_\pi} = 1\right\}$. Puisque φ est discret, $Z^\circ_{\mathrm{SO}_N(\mathbf{C})} = \{1\}$ est un tore maximal de $Z_{\mathrm{SO}_N(\mathbf{C})}(\varphi)$. Par suite, I_{GL} est vide et donc

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{O}_N(\mathbf{C})}(\varphi) &= \prod_{\pi\in I_O}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{d_\pi} \times \prod_{\pi\in I_S}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{d_\pi}, \\ Z_{\mathrm{SO}_N(\mathbf{C})}(\varphi) &= Z_\varphi^+ \times \prod_{\pi\in I_S}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{d_\pi} \end{aligned}$$

Comme précédemment, on trouve que $\mathrm{Jord}(\varphi)$ est sans trou et que les caractères cuspidaux correspondent aux caractères alternées de $\mathrm{Jord}(\varphi)$.

Définition 4.15. On appelle L-donnée cuspidale complète de $\widehat{G}$, un triplet $(\widehat{L},\varphi,\varepsilon)$ formé de
— un sous-groupe de Levi $\widehat{L}$ de $\widehat{G}$;
— $\varphi : W'_F \longrightarrow \widehat{L}$ un paramètre de Langlands L cuspidal ;
— ε une représentation irréductible cuspidale de $\mathcal{S}_\varphi^L$.

Soit $(\widehat{L}_1,\varphi_1,\varepsilon_1),(\widehat{L}_2,\varphi_2,\varepsilon_2)$ deux L-données cuspidales complètes. On dit qu'elles sont associées, s'il existe $g\in\widehat{G}$ tel que
— ${}^g\widehat{L}_1 = \widehat{L}_2$
— ${}^g\varphi_1 = \varphi_2$
— $\varepsilon_1^g \simeq \varepsilon_2$
On dit qu'elles sont inertiellement équivalentes, s'il existe $g\in\widehat{G}$ et $\chi\in\mathfrak{X}(\widehat{L}_2)$ tels que
— ${}^g\widehat{L}_1 = \widehat{L}_2$
— ${}^g\varphi_1 = \varphi_2\chi$
— $\varepsilon_1^g \simeq \varepsilon_2$
Soit $\mathcal{j} = [\widehat{L},\varphi,\varepsilon]_{\widehat{G}}$ une paire inertielle complète. On lui associe le tore complexe et le groupe fini

$$\mathcal{T}_{\mathcal{j}} = \{(\varphi\chi)_{\widehat{L}}, \chi\in\mathfrak{X}(\widehat{L})\} \simeq \mathfrak{X}(\widehat{L})/\mathfrak{X}(\widehat{L})(\varphi)$$

$$\mathcal{W}_{\mathcal{j}} = \{w\in N_{\widehat{G}}(\widehat{L})/\widehat{L}, \exists\chi\in\mathfrak{X}(\widehat{L}),\ ({}^w\varphi)_{\widehat{L}} = (\varphi\chi)_{\widehat{L}},\ \varepsilon^w\simeq\varepsilon\}.$$

On note $\Omega(G)^+_{\mathrm{st}}$ l'ensemble des classes de données cuspidales complètes. et $\mathcal{B}(G)^+_{\mathrm{st}}$ l'ensemble des classes inertielles. L'ensemble des L-données cuspidales complètes est muni d'une structure de variété algébrique dont les composantes connexes sont indexées par $\mathcal{B}(G)^+_{\mathrm{st}}$ et sont des quotients de tores complexes par l'action de groupes finis. Contrairement à la décomposition de la section précédente, on ne sait pas associer, pour le moment, à tout paramètre de Langlands complet $(\phi,\eta)\in\Phi(G)^+$ un triplet dans $\Omega(G)^+_{\mathrm{st}}$ (ou dans $\mathcal{B}(G)^+_{\mathrm{st}}$). Supposons que ce soit le cas (ce sera prouvé pour les groupes classiques dans la suite), on a alors une décomposition de l'ensemble des paramètres de Langlands complets de $\widehat{G}$:

$$\Phi(G)^+ = \bigsqcup_{\mathcal{j} \in \mathcal{B}(G)^+_{\mathrm{st}}} \Phi(G)^+_{\mathcal{j}},$$

où $\Phi(G)^+_{\mathcal{j}}$ désigne l'ensemble des classes de paramètres de Langlands complets associé à $\mathcal{j}$.

Conjecture 4.16. *Soit $\varphi : W'_F \longrightarrow \widehat{L}$ un paramètre de Langlands de L cuspidal. Supposons la conjecture 4.13 vraie. Si $\sigma \in \Pi_\varphi(L)_{\mathrm{cusp}}$ est paramétrée par $\varepsilon \in \mathbf{Irr}(\mathcal{S}^L_\varphi)_{\mathrm{cusp}}$, alors en notant $\mathfrak{s} = [L, \sigma]_G$, $\mathcal{j} = [\widehat{L}, \varphi, \varepsilon]$, on a des isomorphimes :*

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathfrak{s}} & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\mathcal{j}} \\ \chi & \longmapsto & \widehat{\chi} \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} W_{\mathfrak{s}} & \longrightarrow & \mathcal{W}_{\mathcal{j}} \\ w & \longmapsto & \widehat{w} \end{array},$$

tels que pour tout $\chi \in T_{\mathfrak{s}}$, $w \in W_{\mathfrak{s}}$:

$$\widehat{w \cdot \chi} = \widehat{w} \cdot \widehat{\chi}.$$

Cette conjecture sera prouvée pour les groupes classiques au théorème 5.6.

Lemme 4.17. *Soit M un sous-groupe de Levi de G et $\lambda : W_F \longrightarrow \widehat{M}$ un paramètre de Langlands de M discret. Alors $Z_{\widehat{M}}(\lambda)^\circ = Z^\circ_{\widehat{M}}$.*

Démonstration. La discrétion du paramètre λ implique que $Z^\circ_{\widehat{M}}$ est un tore maximal de $Z_{\widehat{M}}(\lambda)^\circ$. Ensuite, d'après [Kot84, 10.3.1], $Z_{\widehat{M}}(\lambda)^\circ \subseteq Z_{\widehat{M}}$, donc $Z_{\widehat{M}}(\lambda)^\circ \subseteq Z^\circ_{\widehat{M}}$. D'où l'égalité. □

Proposition 4.18. *On reprend les notations du lemme précédent. Si $\phi \in \Phi(M)$ est un paramètre de Langlands de M de cocaractère infinitésimal λ, alors $\phi = \lambda$. Ceci implique que le paquet infinitésimal et L-paquet de M défini par λ coïncident :*

$$\widetilde{\Pi}_\lambda(M) = \Pi_\lambda(M).$$

De plus, toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{S}_\lambda(M)$ sont cuspidales, c'est-à-dire

$$\mathbf{Irr}(\mathcal{S}^M_\lambda) = \mathbf{Irr}(\mathcal{S}^M_\lambda)_{\mathrm{cusp}}.$$

Démonstration. Soit $\phi : W'_F \longrightarrow \widehat{M}$ un paramètre de Langlands de M de cocaractère infinitésimal λ. Ceci signifie que pour tout $w \in W_F$, $\phi(w, d_w) = \lambda(w)$.

Par connexité, $\phi(\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})) \subseteq Z_{\widehat{M}}(\phi|_{W_F})^\circ$. L'image par ϕ de $T_{\mathrm{SL}_2} = \{\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}, t \in \mathbf{C}^\times\}$, tore maximal de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, est un tore (éventuellement trivial) de $Z_{\widehat{M}}(\phi|_{W_F})^\circ$. Soit A un tore maximal de $Z_{\widehat{M}}(\phi|_{W_F})^\circ$ contenant $\phi(T_{\mathrm{SL}_2})$. Notons $\widehat{L} = Z_{\widehat{M}}(A)$; c'est un sous-groupe de Levi de $\widehat{M}$. Puisque $A \subset Z_{\widehat{M}}(\phi|_{W_F})$, on a $\phi(W_F) \subset Z_{\widehat{M}}(A)$ et $\phi(1, d_w) \in A \subset \widehat{L}$. Ainsi, pour tout $w \in W_F, \lambda(w) = \phi(w, d_w) \in \widehat{L}$. Par discrétion de λ, $\widehat{L} = \widehat{M}$. Donc $Z^\circ_{\widehat{M}}$ est un tore maximal de $Z_{\widehat{M}}(\phi|_{W_F})$ et par suite $\phi|_{W_F} : W_F \longrightarrow \widehat{M}$ est un paramètre de Langlands discret. D'après le lemme précédent, $Z_{\widehat{M}}(\phi|_{W_F})^\circ = Z^\circ_{\widehat{M}}$ est un tore. L'image de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ par ϕ est contenue dans un tore, cette image est donc triviale. D'où $\phi = \lambda$.
Soit $\varepsilon \in \mathbf{Irr}(\mathcal{S}^M_\lambda)$ et $\widetilde{\varepsilon} \in \mathbf{Irr}(A_{\widehat{M}}(\lambda))$. Puisque $(H^M_\lambda)^\circ = A_{\widehat{M}}$ est un tore, la seule sous-représentation irréductible de la restriction de $\widetilde{\varepsilon}$ à $(H^M_\lambda)^\circ$ est la représentation triviale et la paire $(\mathcal{C}_1^{A_{\widehat{M}}}, 1)$ est automatiquement cuspidale. D'où $\mathbf{Irr}(\mathcal{S}^M_\lambda) = \mathbf{Irr}(\mathcal{S}^M_\lambda)_{\mathrm{cusp}}$. □

Remarque 4.19. Cette proposition montre que la conjecture 4.13 sur le paramétrage des représentations supercuspidales est compatible avec une propriété de la correspondance de Langlands, à savoir que le L-paquet d'un paramètre discret $\lambda : W_F \longrightarrow \widehat{M}$ n'est constitué que de représentations supercuspidales de M. Notons par ailleurs, qu'Heiermann dans [Hei06] construit sous diverses hypothèses les paramètres de séries discrètes non-cuspidales à partir du paramètre de leurs support cuspidal. Sa construction montre que nécessairement la restriction à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ est non triviale pour ces séries discrètes. Ainsi un paramètre discret trivial sur $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ ne peut contenir que des représentations supercuspidales.

Posons
$$D_\varphi^G = \{g \in Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|I_F}),\ g\varphi(\mathrm{Fr})g^{-1}\varphi(\mathrm{Fr})^{-1} \in A_{\widehat{L}}\}.$$
Alors, $(D_\varphi^G)^\circ = (H_\varphi^G)^\circ$. En effet, il est clair que $H_\varphi^G \subset D_\varphi^G$, donc $(H_\varphi^G)^\circ \subseteq (D_\varphi^G)^\circ$. Par ailleurs, $X \in \mathrm{Lie}(D_\varphi^G)$, si et seulement, pour tout $w \in I_F$, $\mathrm{Ad}(\varphi(w))X = X$ et $\varphi(\mathrm{Fr})(1+\varepsilon X)\varphi(\mathrm{Fr})^{-1}(1-\varepsilon X) = 1 + \varepsilon(\mathrm{Ad}(\varphi(\mathrm{Fr}))X - X) \in A_{\widehat{L}}$, ce qui est équivalent à $\mathrm{Ad}(\varphi(\mathrm{Fr}))X = X$. Par suite, $\mathrm{Lie}(D_\varphi^G) = \mathrm{Lie}(H_\varphi^G)$, d'où $(H_\varphi^G)^\circ = (D_\varphi^G)^\circ$.

Le groupe $Z_{D_\varphi^G}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$ est l'ensemble des éléments $g \in \widehat{G}$ tels qu'il existe $\chi \in \mathfrak{X}(\widehat{L})$ et ${}^g\varphi = \varphi\chi$. Considérons
$$N_{Z_{D_\varphi^G}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})}(A_{\widehat{L}}, \varepsilon) = \{g \in \widehat{G},\ {}^gA_{\widehat{L}} = A_{\widehat{L}},\ \exists \chi \in \mathfrak{X}(\widehat{L}),\ {}^g\varphi = \varphi\chi,\ {}^g\varepsilon \simeq \varepsilon\}.$$

On a un morphisme évident $N_{Z_{D_\varphi^G}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})}(A_{\widehat{L}}, \varepsilon) \longrightarrow \mathcal{W}_{\mathscr{j}}$, donné par $n \mapsto n\widehat{L}$. Ce dernier est surjectif. En effet, par définition si $g \in N_{\widehat{G}}(A_{\widehat{L}})$ est tel qu'il existe $\chi \in \mathfrak{X}(\widehat{L})$, $({}^g\varphi)_{\widehat{L}} = (\varphi\chi)_{\widehat{L}}$ et ${}^g\varepsilon \simeq \varepsilon$, alors il existe $l \in \widehat{L}$ tel que ${}^{lg}\varphi = \varphi\chi$. On prend alors $n = lg \in N_{Z_{D_\varphi^G}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})}(A_{\widehat{L}}, \varepsilon)$ et on a bien $n\widehat{L} = g\widehat{L}$. Le noyau de ce morphisme étant $Z_{D_\varphi^L}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$. Ainsi,
$$\mathcal{W}_{\mathscr{j}} \simeq N_{Z_{D_\varphi^G}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})}(A_{\widehat{L}})/Z_{D_\varphi^L}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2}).$$

Notons
$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathscr{j}}^\circ &= N_{Z_{D_\varphi^G}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})^\circ}(A_{\widehat{L}})/Z_{D_\varphi^L}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})^\circ \\ &\simeq N_{Z_{H_\varphi^{G\circ}}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})^\circ}(A_{\widehat{L}})/Z_{H_\varphi^{L\circ}}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})^\circ \\ &\simeq N_{Z_{H_\varphi^{G\circ}}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})^\circ}(A_{\widehat{L}})/A_{\widehat{L}} \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme du fait que $Z_{H_\varphi^{L\circ}}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})^\circ = Z_{\widehat{L}}(\varphi)^\circ = A_{\widehat{L}}$, car φ est un paramètre discret de L. Remarquons que $\mathcal{W}_{\mathscr{j}}^\circ$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{W}_{\mathscr{j}}$. De plus, $\mathcal{W}_{\mathscr{j}}^\circ$ est le groupe de Weyl du groupe réductif $Z_{H_\varphi^{G\circ}}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})^\circ = Z_{\widehat{G}}(\varphi)^\circ$, admettant $A_{\widehat{L}}$ pour tore maximal. Notons $\Sigma_{\mathscr{j}}$ le système de racines associé à $(Z_{\widehat{G}}(\varphi)^\circ, A_{\widehat{L}})$ et $\Sigma_{\mathscr{j}}^+$ un sous-ensemble de racines positives. Soit
$$\mathcal{R}_{\mathscr{j}} = \left\{ w \in \mathcal{W}_{\mathscr{j}}, w\Sigma_{\mathscr{j}}^+ = \Sigma_{\mathscr{j}}^+ \right\}.$$
Puisque $\mathcal{W}_{\mathscr{j}}^\circ$ agit simplement transitivement sur les systèmes de racines positives, on a la décomposition suivante
$$\mathcal{W}_{\mathscr{j}} = \mathcal{W}_{\mathscr{j}}^\circ \rtimes \mathcal{R}_{\mathscr{j}}.$$

Remarque 4.20. Soit $\chi \in \mathfrak{X}(\widehat{L})$ un caractère non-ramifié. Considérons le stabilisateur de $(\varphi\chi)_{\widehat{L}}$ dans $\mathcal{W}_{\mathcal{J}}$, que l'on note $\mathcal{W}_{\mathcal{J},\varphi\chi}$ De la même façon que précédemment, on obtient

$$\mathcal{W}_{\mathcal{J},\varphi\chi} \simeq N_{Z_{\widehat{G}}(\varphi\chi)}(A_{\widehat{L}}, \varepsilon)/Z_{\widehat{L}}(\varphi\chi) \simeq N_{Z_{H^G_{\varphi\chi}}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})}(A_{\widehat{L}}, \varepsilon)/Z_{H^L_{\varphi\chi}}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2}).$$

Comme on le verra dans la suite, dans le cas des groupes classiques, par construction, ε sera automatiquement stabilisé et on a l'isomorphisme suivant :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{J},\varphi\chi} \simeq N_{Z_{H^G_{\varphi}}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})}(A_{\widehat{L}}, \varepsilon)/Z_{H^L_{\varphi}}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2}) \simeq N_{H^G_{\varphi\chi}}(A_{\widehat{L}})/H^L_{\varphi\chi}.$$

Cet isomorphisme résulte de 1.3 et est probablement vrai en général.

Exemple 4.21. Considérons le paramètre de Langlands ϕ de $\mathrm{Sp}_4(F)$ défini par

$$\phi = \zeta \boxtimes S_3 \oplus \zeta \oplus 1,$$

où ζ est un caractère quadratique de W_F. Le L-paquet qu'il définit contient 4 représentations irréductibles de $\mathrm{Sp}_4(F)$:

$$\Pi_\phi(\mathrm{Sp}_4) = \{\delta'(\zeta), \delta''(\zeta), \sigma, \sigma'\},$$

où $\delta'(\zeta)$ et $\delta''(\zeta)$ sont les sous-représentations irréductibles de carré intégrable de $\nu\zeta \times \zeta \rtimes 1$ décrites dans [ST93, Theorem 5.1 (i)] et σ, σ' sont des représentations irréductibles supercuspidales.
On a alors $H_\phi(\mathrm{Sp}_4) = (\mathrm{O}_4 \times \mathrm{O}_1)^+$ et $u_\phi \in \mathrm{SO}_4(\mathbf{C}) \times \mathrm{SO}_1$ est l'unipotent paramétré par la partition $(3,1)$. De plus, $\mathcal{S}_\phi(\mathrm{Sp}_4) = \langle z_1 z_3 \rangle \times \langle z_1' z_1 \rangle \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ (notation précédente), où $z_1' = -1 \in \mathrm{O}_1$. Les représentations irréductibles cuspidales de $\mathcal{S}_\phi(\mathrm{Sp}_4)$ sont ε_O et ε_O'. Ce sont ces représentations qui paramètrent σ et σ'. Quant à $\delta'(\zeta)$ et $\delta''(\zeta)$, elles sont paramétrées par les caractères tels que l'image de $z_1 z_3$ est 1.

4.2.1 Les groupes de Weil-Deligne

Commençons par un rappel sur les deux notions de groupes de Weil-Deligne. À l'origine, Deligne a introduit dans [Del73, 8.3.6] le groupe de Weil-Deligne comme le produit semi-direct

$$WD_F = \mathbf{C} \rtimes W_F,$$

l'action de W_F sur $\mathbf{C}$ étant définie de la façon suivante : pour tout $w \in W_F, z \in \mathbf{C},\ wzw^{-1} = ||w||z$. Ainsi, pour tout (z,w), $(z',w') \in WD_F$,

$$(z,w)(z',w') = (z + ||w||z', ww').$$

On reprend les notations précédentes et on note $\widehat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de $\widehat{G}$. Dans ce contexte, un paramètre de Langlands de G est la donnée d'un couple (λ, N) avec

— $\lambda : W_F \longrightarrow \widehat{G}$, un morphisme continu et dont l'image est constitué d'éléments semi-simples ;

— $N \in \widehat{\mathfrak{g}}$, un élément nilpotent tel que pour tout $w \in W_F,\ \mathrm{Ad}(\lambda(w))N = ||w||N$.

La relation d'équivalence sur ces couples est toujours la $\widehat{G}$-conjugaison, c'est-à-dire on considère (λ, N) équivalent à (λ', N'), si et seulement si, il existe $g \in \widehat{G}$ tel que $\lambda' = {}^g\lambda$ et $N' = \mathrm{Ad}(g)N$. Pour distinguer les deux notions de paramètres de Langlands, on appelera les couples définis précédemment des paramètres de Langlands originels.
Notons $\widehat{\mathfrak{h}}_\lambda = \widehat{\mathfrak{g}}^{\lambda(I_F)} = \{X \in \widehat{\mathfrak{g}},\ \forall w \in I_F,\ \mathrm{Ad}(\lambda(w))X = X\}$. L'élément semi-simple $\lambda(\mathrm{Fr})$

normalise $\lambda(I_F)$, il agit donc par adjonction sur $\widehat{\mathfrak{h}}_\lambda$. Pour $\alpha \in \mathbf{C}$, notons $\widehat{\mathfrak{h}}_\lambda(\alpha)$ l'espace propre de $\mathrm{Ad}(\lambda(\mathrm{Fr}))$ dans $\widehat{\mathfrak{h}}_\lambda$ associé à la valeur propre α. La condition que N doit vérifiée est donc équivalente à $N \in \widehat{\mathfrak{h}}_\lambda(q^{-1})$.
Pour tout $w \in W_F$, notons :

$$d_w = \begin{pmatrix} ||w||^{1/2} & 0 \\ 0 & ||w||^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

À partir d'un paramètre de Langlands de G de la forme $\phi : W_F' \longrightarrow \widehat{G}$, on définit explicitement un couple (λ, N) de la façon suivante : pour tout $w \in W_F$,

$$\lambda(w) = \phi(w, d_w) \quad \text{et} \quad N = d\phi|_{\mathrm{SL}_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, à tout couple (λ, N), on peut associer un paramètre de Langlands de G de la forme $\phi : W_F' \longrightarrow \widehat{G}$. Ceci repose sur le raffinement par Kostant du théorème de Jacobson-Morozov (voir [GR10, lemme 2.1]). L'élément $N \in \widehat{\mathfrak{h}}_\lambda$ étant nilpotent, d'après le théorème de Jacobson-Morozov, il existe un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (X, Y, T), c'est-à-dire des éléments $X, Y, T \in \widehat{\mathfrak{h}}_\lambda$ vérifiant

$$[T, X] = 2X, \ [T, Y] = -2Y, \ [X, Y] = T,$$

avec $X = N$. De plus, d'après le raffinement de Kostant, on peut en plus supposer que

$$X = N \in \widehat{\mathfrak{h}}_\lambda(q^{-1}), \ T \in \widehat{\mathfrak{h}}_\lambda(1), \ Y = \widehat{\mathfrak{h}}_\lambda(q).$$

Posons $S = \frac{\log q}{2} T$ et soit $\gamma : \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \longrightarrow Z_{\widehat{G}}(\lambda(I_F))^\circ$ le morphisme défini par le $\mathfrak{sl}_2$-triplet précédent avec

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(N),$$

et $\chi_\phi : W_F \longrightarrow \widehat{G}$ le morphisme défini pour tout $w \in W_F$, par

$$\chi_\phi(w) = \gamma(d_w)^{-1}.$$

Il est clair que χ_ϕ est entièrement déterminé par l'image de Fr, c'est-à-dire par

$$s = \exp(S) = \gamma \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix} \in Z_{\widehat{G}}(\lambda(I_F))^\circ.$$

Puisque $S \in \widehat{\mathfrak{h}}_\lambda(1)$, $\lambda(\mathrm{Fr})$ commute à s. De plus, on a les relations

$$\mathrm{Ad}(s)N = qN, \ \mathrm{Ad}(s)Y = q^{-1}Y.$$

Ceci montre que N, Y, T sont fixés par l'action adjointe des éléments de $(\lambda\chi_\phi)(W_F)$, donc $\gamma(\mathrm{SL}_2(\mathbf{C}))$ est contenu dans $Z_{\widehat{G}}((\lambda\chi_\phi)(W_F))$. Ceci permet de définir $\phi : W_F' \longrightarrow \widehat{G}$ pour tout $w \in W_F, x \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, par

$$\phi(w, x) = \lambda(w)\chi_\phi(w)\gamma(x).$$

On obtient ainsi une bijection entre les classes de paramètres de Langlands de G et les classes de paramètres de Langlands originels de G (voir [GR10, proposition 2.2]).

4.2.2 Support cuspidal d'un paramètre de Langlands complet

La correspondance de Langlands locale relie $\mathbf{Irr}(G)$ et les classes de paramètres de Langlands complets $\Phi(G)^+$. Nous avons énoncé (et vérifié pour les groupes classiques) précédemment une conjecture concernant les paramètres de Langlands complets des représentations supercuspidales. Tout comme l'application de support cuspidal (et de support inertiel) est bien définie, par la correspondance de Langlands, il lui correspond une application de support cuspidal pour les paramètres de Langlands complets. Autrement dit, il existe une application

$$\mathscr{L}c : \Phi(G)^+ \longrightarrow \Omega(G)^+_{\mathrm{st}},$$

qui pour tout paramètre complet $(\phi,\eta) \in \Phi(G)^+$, associe un triplet $(\widehat{L},\varphi,\epsilon)$ avec $\widehat{L}$ un sous-groupe de Levi de $\widehat{G}$, $\varphi \in \Phi(L)_{\mathrm{cusp}}$ un paramètre cuspidal et $\varepsilon \in \mathbf{Irr}(\mathcal{S}^L_\varphi)$ une représentation cuspidale, au sens défini en 4.11. Par ailleurs, la correspondance de Langlands permet de définir une application $\mathrm{rec}^+_{\Omega(G)} : \Omega(G) \longrightarrow \Omega(G)^+_{\mathrm{st}}$, qui à une paire cuspidale (L,σ) associe $(\widehat{L},\mathrm{rec}^+_L(\sigma))$. Ainsi, l'application de support cuspidal pour les paramètres de Langlands complets doit être compatible avec la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Irr}(G) \arrow[r, "\mathrm{rec}^+_G"] \arrow[d, "\mathbf{Sc}"] & \Phi(G)^+ \arrow[d, "\mathscr{L}c"] \\
\Omega(G) \arrow[r, "\mathrm{rec}^+_{\Omega(G)}"] & \Omega(G)^+_{\mathrm{st}}
\end{tikzcd},$$

c'est-à-dire, pour tout $\pi \in \mathbf{Irr}(G)$, si $(L,\sigma) = \mathbf{Sc}(\pi)$ et $(\varphi,\varepsilon) = \mathrm{rec}^+_L(\sigma)$, alors $\mathscr{L}c(\mathrm{rec}^+_G(\pi)) = (\widehat{L},\varphi,\varepsilon)$.

Cette section est consacré à la définition du support cuspidal d'un paramètre de Langlands complet (ϕ,η) « intrinsèquement », c'est-à-dire directement à partir du paramètre complet (sans utiliser la correspondance de Langlands). Pour cela nous utilisons les techniques de Lusztig pour définir le Levi et le paramètre de Langlands cuspidal. Nous retrouvons (et nous nous inspirons) une construction similaire chez Lusztig ([Lus88], [Lus95b], [Lus95a]) et Waldspurger [Wal04] dans leur travaux sur la classification des représentations de réductions unipotentes d'un groupe simple adjoint (voir notamment [Wal04, §2]).

Soit G un groupe réductif connexe déployé sur F et $(\phi,\eta) \in \Phi(G)^+$ un paramètre de Langlands complet de G. On reprend les notations de la section précédente. La partie semi-simple de ϕ est notée λ, l'élément nilpotent de l'algèbre de Lie associé est noté N_ϕ. Rappelons que pour tout $w \in W_F$, $\chi_\phi(w) = \phi(1,\mathrm{diag}(||w||^{-1/2},||w||^{1/2}))$. La restriction de ϕ à W_F est égale à $\lambda\chi_\phi$.

Théorème 4.22. *Soit $(\phi,\eta) \in \Phi(G)^+$ un paramètre de Langlands complet de G. La construction suivant cet énoncé permet de définir un triplet $(\widehat{L},\varphi,\varepsilon_0)$ formé d'un sous-groupe de Levi $\widehat{L}$ de $\widehat{G}$, un paramètre de Langlands discret φ de L, une représentation irréductible cuspidale ε_0 de $A_{Z_{\widehat{L}}(\varphi)^\circ}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})})$ tels que :*

— *ϕ et φ ont la même partie semi-simple ;*

— *pour tout $w \in W_F$, $\chi_\phi(w) \in \widehat{L}$;*

— *pour tout $w \in W_F$, $\chi_c(w) = \chi_\phi(w)/\chi_\varphi(w) \in Z^\circ_{\widehat{L}}$.*

De plus, si $(\widehat{L}',\varphi',\varepsilon'_0)$ est un autre triplet qui vérifient ces propriétés, alors il est conjugué à $(\widehat{L},\varphi,\varepsilon_0)$ par un élément de $Z_{\widehat{G}}(\phi_{|W_F})^\circ$.

On note $H_\phi^G = Z_{\widehat{G}}(\lambda\chi_\phi)$ le centralisateur dans $\widehat{G}$ de l'image de $\lambda\chi_\phi$. On notera plus simplement $H_\phi = \left(H_\phi^G\right)^\circ$ sa composante neutre et $\mathcal{O}$ la H_ϕ-classe de conjugaison de N_ϕ.
On a $A_{\widehat{G}}(\phi) = A_{H_\phi^G}(\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})})$ et on peut considérer le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A_{H_\phi^G}(\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})}) \arrow[r, "pr"] & \mathcal{S}_\phi^G \arrow[r] & 1 \\ A_{(H_\phi^G)^\circ}(\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})}) \arrow[u, hook] & & \end{tikzcd}$$

Notons $\widetilde{\eta}$ la représentation de $A_{H_\phi^G}(\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})})$ obtenue en composant η avec pr et soit η_0 une sous-représentation irréductible de la restriction de $\widetilde{\eta}$ au sous-groupe distingué $A_{H_\phi}(\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})})$. La correspondance de Springer généralisée pour le groupe connexe H_ϕ associe au couple $(\mathcal{O}, \eta_0)$, un sous-groupe de Levi de H_ϕ. Notons $A_{\widehat{L}}$ la composante déployée de ce Levi et définissons $\widehat{L} = Z_{\widehat{G}}(A_{\widehat{L}})$ et $H_\varphi = Z_{H_\phi}(A_{\widehat{L}})$. La correspondance de Springer généralisée associe aussi à $(\mathcal{O}, \eta_0)$ la H_ϕ-classe de conjugaison d'un quadruplet $(H_\varphi, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \rho)$ formé de :
— H_φ un sous-groupe de Levi de H_ϕ ;
— $\mathcal{C} \subset \mathfrak{h}_\varphi$ une H_φ-orbite nilpotente ;
— $\mathcal{L}$ un système local irréductible cuspidal H_φ-équivariant sur $\mathcal{C}$;
— ρ une représentation irréductible de $N_{H_\phi}(H_\varphi)/H_\varphi$
Le système local $\mathcal{L}$ correspond à une représentation irréductible ε_0 de $A_{H_\varphi}(u_\varphi)$, avec $u_\varphi \in \mathcal{C}$.
Soient $P_\varphi = H_\varphi U_\varphi$ un sous-groupe parabolique de H_ϕ admettant H_φ comme facteur de Levi. Le plus grand tore central de H_φ est $A_{\widehat{L}}$. Nous avons vu dans la section 3.4 que Lusztig a associé à un triplet cuspidal des modules standards. On rappelle que

$$\mathcal{P}_\varphi = \left\{ hP_\varphi \in H_\phi/P_\varphi,\ \mathrm{Ad}(h^{-1})N_\phi \in \mathcal{C} + \mathfrak{u}_\varphi \right\},$$

et qu'on notera $H_{\mathbf{C}} = H_\phi \times \mathbf{C}^\times$, $\widehat{A} = Z_{H_{\mathbf{C}}}(N_\phi)^\circ$ et $\widehat{\mathfrak{a}}$ l'algèbre de Lie de $Z_{H_{\mathbf{C}}}(N_\phi)$. Le groupe $H_{\mathbf{C}}$ agit sur $\mathfrak{h}_\phi$ par :

$$(h,t)X = t^{-2}\mathrm{Ad}(h)X, \quad (h,t) \in H_{\mathbf{C}}, X \in \mathfrak{h},$$

et le groupe $Z_{H_{\mathbf{C}}}(N_\phi)$ agit sur $\mathcal{P}_\varphi$ par :

$$(h,t) \cdot h'P_\varphi = hh'P_\varphi, \quad (h,t) \in H_{\mathbf{C}},\ h'P_\varphi \in \mathcal{P}_\varphi.$$

Posons $\mathrm{a} = (S, \frac{\log q}{2}) \in \widehat{\mathfrak{a}}$ avec $S = d\phi|_{\mathrm{SL}_2}\begin{pmatrix} \frac{\log q}{2} & \\ & -\frac{\log q}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_\phi$. Le morphisme d'évaluation au point $\mathrm{a} \in \mathcal{Z}$ définit un $H_{\widehat{A}}$-module, que l'on note $\mathbf{C}_a$. Posons

$$H^{\widehat{A}}(\mathcal{P}_\varphi, \mathcal{L})_{\mathrm{a}} = \mathbf{C}_{\mathrm{a}} \otimes_{H_{\widehat{A}}} H^{\widehat{A}}(\mathcal{P}_\varphi, \mathcal{L}).$$

Notons $\widehat{D}$ le plus petit tore de $\widehat{A}$ dont l'algèbre de Lie contient a et $\mathcal{P}_\varphi^{\widehat{D}}$ le sous-ensemble des invariants par $\widehat{D}$ dans $\mathcal{P}_\varphi$. D'après [Lus88, 7.5] et [Lus95b, 4.4], on a :

$$\begin{aligned} H^{\widehat{A}}(\mathcal{P}_\varphi, \mathcal{L})_{\mathrm{a}} &\simeq \mathbf{C}_{\mathrm{a}} \otimes_{H_{\widehat{D}}} H^{\widehat{D}}(\mathcal{P}_\varphi, \mathcal{L}) \\ &\simeq \mathbf{C}_{\mathrm{a}} \otimes_{H_{\widehat{D}}} H^{\widehat{D}}(\mathcal{P}_\varphi^{\widehat{D}}, \mathcal{L}). \end{aligned}$$

Comme dans la section précédente, notons (X,Y,T) le $\mathfrak{sl}_2$-triplet associé à $\phi|_{\mathrm{SL}_2}$ (avec $X = N_\phi$) et rappelons que $A_{H_\phi}(\phi|_{\mathrm{SL}_2}) \simeq A_{H_\phi}(N_\phi)$.

Par construction et d'après [Lus88, 8.10], $H^{\widehat{A}}(\mathcal{P}_\varphi, \mathcal{L})_{\mathrm{a}} \neq \{0\}$ et en particulier $\mathcal{P}_\varphi^{\widehat{D}}$ est non vide. Il existe donc $h \in H_\phi$ tel que $\mathrm{Ad}(h^{-1})N_\phi \in \mathcal{C} + \mathfrak{u}_\varphi$ et $\mathrm{Ad}(h^{-1})S \in \mathfrak{p}_\varphi$. Quitte à conjuguer, on peut donc supposer $N_\phi \in \mathcal{C} + \mathfrak{u}_\varphi$ et $S \in \mathfrak{p}_\varphi$. L'élément S étant semi-simple, il appartient à une sous-algèbre de Levi que nous notons temporairement $\mathfrak{h}'_\varphi$. Écrivons $N_\phi = N_\varphi + U$ avec $N_\varphi \in \mathcal{C} \subset \mathfrak{h}_\varphi$, $U \in \mathfrak{u}_\varphi$. Soient $N'_\varphi \in \mathfrak{h}'_\varphi$ la projection de N_φ sur $\mathfrak{h}'_\varphi$ relativement à la décomposition $\mathfrak{p}_\varphi = \mathfrak{h}'_\varphi \oplus \mathfrak{u}_\varphi$ et $\mathcal{C}'$ sa H'_φ-classe de conjugaison. On a $P_\varphi/U_\varphi \simeq H_\varphi \simeq H'_\varphi$, ainsi la H_φ-classe de conjugaison $\mathcal{C}$ est isomorphe à la H'_φ-classe de conjugaison $\mathcal{C}'$. Ainsi, quitte à faire ces considérations, on peut supposer que $S \in \mathfrak{h}_\varphi$ et $N_\phi \in \mathcal{C} + \mathfrak{u}_\varphi$. Puisque $[S, N_\phi] = (\log q)N_\phi$, il s'ensuit que $[S, N_\varphi] = (\log q)N_\varphi$.

D'après le théorème de Jacobson-Morozov-Kostant (appliqué à $\mathfrak{h}_\varphi$ et à l'action de S), il existe un morphisme

$$\theta : \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \longrightarrow H_\varphi,$$

tel que $d\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N_\varphi$ et pour tout $t \in \mathbf{C}^\times$, $\theta \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}$ commute à $s = \exp(S)$.

Définissons les cocaractères χ_φ et χ_c, pour tout $w \in W_F$, par :

$$\chi_\varphi = \theta(d_w)^{-1}, \ \chi_c(w) = \chi_\phi(w)/\chi_\varphi(w),$$

si bien que l'on a une décomposition $\chi_\phi = \chi_\varphi\chi_c = \chi_c\chi_\varphi$.

Puisque pour tout $w \in W_F$,

$$\mathrm{Ad}(\lambda\chi_\phi(w))N_\varphi = N_\varphi, \quad \mathrm{Ad}(\chi_\phi(w))N_\varphi = ||w||^{-1}N_\varphi, \quad \mathrm{Ad}(\chi_\varphi(w))N_\varphi = ||w||^{-1}N_\varphi,$$

on en déduit que pour tout $w \in W_F$, on a :

$$\mathrm{Ad}(\chi_c(w))N_\varphi = N_\varphi, \ \mathrm{Ad}(\lambda(w))N_\varphi = ||w||N_\varphi.$$

Par suite, on peut définir un paramètre de Langlands φ pour tout $(w,x) \in W'_F$, par

$$\varphi(w,x) = \lambda(w)\chi_\varphi(w)\theta(x).$$

D'après [Lus84, Proposition 2.8], puisque $\mathcal{C}$ supporte un système local cuspidal, N_φ est un élément nilpotent distingué de $\mathfrak{h}_\varphi$. De plus, pour tout $w \in W_F$ l'élément semi-simple $\chi_c(w) \in H_\varphi$ commute à N_φ. Donc pour tout $w \in W_F$, $\chi_c(w) \in A_{\widehat{L}}$. On obtient ainsi,

$$\begin{aligned} Z_{H_\phi^G}(A_{\widehat{L}}) &= Z_{\widehat{G}}(A_{\widehat{L}}, \lambda\chi_\phi) \\ &= Z_{\widehat{L}}(\lambda\chi_\phi) \\ &= Z_{\widehat{L}}(\lambda\chi_\varphi\chi_c) \\ &= Z_{\widehat{L}}(\lambda\chi_\varphi) \\ &= H_\varphi^L \\ H_\varphi &= Z_{H_\phi}(A_{\widehat{L}}) \\ &= Z_{\widehat{L}}(\lambda\chi_\varphi)^\circ \end{aligned}$$

De plus, d'après [Lus88, 2.3.b)], $A_{\widehat{L}}$ est un tore maximal de $Z_{H_\varphi}(\theta)^\circ = Z_{\widehat{L}}(\lambda\chi_\varphi, \theta)^\circ = Z_{\widehat{L}}(\varphi)^\circ$. Ceci prouve que

$$\varphi : W'_F \longrightarrow \widehat{L},$$

est un paramètre de Langlands discret de L. De plus, par construction, il est cuspidal et de partie semi-simple λ. Profitons d'être dans ce contexte pour introduire les définitions suivantes.

Définition 4.23. On reprend les notations précédentes. Soit $\varphi : W'_F \longrightarrow \widehat{L}$ un paramètre de Langlands cuspidal de L et $\phi : W'_F \longrightarrow \widehat{G}$ un paramètre de Langlands de G. On note $H^G_\phi = Z_{\widehat{G}}(\phi_{|W_F})$, $H^L_\varphi = Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F})$ et $\mathfrak{h}^G_\phi$, $\mathfrak{h}^L_\varphi$ leurs algèbres de Lie respectives. On dit que ϕ est adapté à φ si :

— ϕ et φ ont la même partie semi-simple λ ;

— pour tout $t \in \mathbf{C}^\times$, $\phi\left(1, \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}\right) \in H^L_\varphi$;

— il existe une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^L_\varphi \oplus \mathfrak{u}_\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{h}^G_\phi$, admettant $\mathfrak{h}^L_\varphi$ pour sous-algèbre de Levi telle que : $N_\phi \in \mathfrak{p}$ et $N_\phi = N_\varphi + U$ (avec $U \in \mathfrak{u}_\mathfrak{p}$) ;

Définition 4.24. Soit $\varphi : W'_F \longrightarrow \widehat{L}$. On appelle cocaractère correcteur du paramètre de φ dans $\widehat{G}$, tout cocaractère $c : \mathbf{C}^\times \longrightarrow Z^\circ_{\widehat{L}}$ défini pour tout $t \in \mathbf{C}^\times$, par :

$$c(t) = \frac{\phi\left(1, \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}\right)}{\varphi\left(1, \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}\right)},$$

avec ϕ un paramètre de Langlands de G adapté à φ. On note alors $\chi_c : W_F \longrightarrow Z^\circ_{\widehat{L}}$ le cocaractère non ramifié de W_F défini pour tout $w \in W_F$ par $\chi_c = c(||w||^{-1/2})$.

Remarque 4.25. Le fait que c est à valeur dans $Z^\circ_{\widehat{L}}$ résulte du fait que les éléments de $c(W_F) \subset (H^L_\varphi)^\circ$ commutent à N_φ, qui est un distingué dans $\mathfrak{h}^L_\varphi$.

Remarque 4.26. La définition de c montre qu'il y a un nombre fini de cocaractère correcteur du paramètre de φ dans $\widehat{G}$. Plus précisément, ces cocaractères sont uniquement déterminés (à conjugaison près) par l'orbite nilpotente de N_ϕ. Si on se place du point de vue du groupe de Weil-Deligne originel, notons λ la partie semi-simple de φ. Les cocaractères correcteurs de φ dans $\widehat{G}$ sont en bijection avec les orbites nilpotentes $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}^{\lambda(I_F)}_{q^{-1}}/Z_{\widehat{G}}(\lambda)$, tel qu'il existe un élément $N \in \mathcal{O}$ et une décomposition $N = N_\varphi + U$ avec U un élément dans le radical unipotent d'une sous-algèbre parabolique admettant $\mathfrak{l}$ pour facteur de Levi.

Pour finir, expliquons pourquoi $\mathcal{C}$ ne dépend pas du choix de η_0. En effet, si on prend une autre sous-représentation irréductible de $\widetilde{\eta}$, alors elle est de la forme η_0^x, avec $x \in A_{H^G_\phi}(N_\phi)$. Or, la correspondance de Springer généralisée pour $(H^G_\phi)^\circ$ est H^G_ϕ-équivariante. Ainsi, l'orbite nilpotente associée à $({}^x\mathcal{O}, \eta_0^x)$ est ${}^x\mathcal{C}$. Pour le cas des groupes classiques qui nous intéressera dans la suite, c'est-à-dire lorsque $(H^G_\phi)^\circ$ est un produit de groupes symplectiques, spéciaux orthogonaux et linéaires, il y a au plus une orbite nilpotente supportant un système local cuspidal. Nécessairement, ${}^x\mathcal{C} = \mathcal{C}$.
En général, on peut supposer $(H^G_\phi)^\circ$ simplement connexe, puis le décomposer en produit presque direct de groupes simples (et d'un tore central), on vérifie à l'aide de la classification des paires cuspidales contenue dans [Lus84]),que ${}^x\mathcal{C} = \mathcal{C}$.

Pour définir de façon satisfaisante le support cuspidal d'un paramètre de Langlands complet, il nous faut associer non pas une représentation irréductible cuspidale de $A_{Z_{\widehat{L}}(\varphi)^\circ}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})})$ mais une représentation irréductible cuspidale de $A_{Z_{\widehat{L}}(\varphi)}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})}) = A_{\widehat{L}}(\varphi)$. C'est l'objet de la section suivante dans le cas où G est un groupe classique.

4.2.3 Support cuspidal pour les paramètres de Langlands complets dans le cas des groupes classiques

Explicitons cette construction dans le cas qui nous intéresse. Nous reprenons les notations de la section 2.2. Le groupe G désigne l'un des groupes suivants $\mathrm{Sp}_N(F)$ ou $\mathrm{SO}_N(F)$, $\widehat{G}$ son dual de Langlands et $\widehat{G}_*$ le groupe orthogonal associé si $\widehat{G}$ est un groupe spécial orthogonal et $\widehat{G}_* = \widehat{G}$ si $\widehat{G}$ est un groupe symplectique.

Théorème 4.27. *Les constructions suivantes permettent de définir une application de support cuspidal surjective*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{S}_c : & \Phi(G)^+ & \longrightarrow & \Omega(G)^+_{\mathrm{st}} \\ & (\phi,\eta) & \longmapsto & (\widehat{L},\varphi,\varepsilon) \end{array}.$$

De plus, les fibres de cette application sont paramétrées par les représentations irréductibles de $N_{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F}\chi_c)}(A_{\widehat{L}})/Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F}\chi_c)$, où c parcourt l'ensemble (fini) des cocaractères correcteurs de φ dans $\widehat{G}$.

Notons $\mathscr{j} = [L,\varphi,\varepsilon]$. Comme on l'a mentionné dans la remarque 4.20, les fibres de cette application sont les représentations irréductibles de $\mathcal{W}_{\mathscr{j},\varphi\chi_c}$, où c parcourt l'ensemble des cocaractères correcteurs de φ dans $\widehat{G}$.

Soit $\phi : W'_F \longrightarrow \widehat{G}$ un paramètre de Langlands de G et $\widetilde{\eta} \in \mathbf{Irr}(A_{\widehat{G}}(\phi))$ obtenue comme précédemment à partir d'une représentation irréductible $\eta \in \mathcal{S}_\phi^G$. On a vu qu'on pouvait décomposer ϕ sous la forme

$$\phi = \bigoplus_{\pi\in I_O} \pi \boxtimes S_\pi \bigoplus_{\pi\in I_S} \pi \boxtimes S_\pi \bigoplus_{\pi\in I_{GL}} (\pi\oplus\pi^\vee)\boxtimes S_\pi,$$

avec

$$S_\pi = \bigoplus_{q\in J_\pi} r_{\pi,q} S_q,$$

une représentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ décomposée en composantes isotypiques et J_π un ensemble d'entiers naturels.
Si $\widehat{G}$ est un groupe symplectique, alors

$$\begin{aligned} A_{\widehat{G}}(\phi) &\simeq \prod_{\pi\in I_O} A_{\widehat{G}_\pi}(u_{\phi,\pi}) \times \prod_{\pi\in I_S} A_{\widehat{G}_\pi}(u_{\phi,\pi}) \times \prod_{\pi\in I_{GL}} A_{\widehat{G}_\pi}(u_{\phi,\pi}) \ , \\ A_H(\phi|_{W_F}) &\simeq \prod_{\pi\in I_O} A_{\widehat{G}_\pi}(u_{\phi,\pi}) \times \prod_{\pi\in I_S} A_{\widehat{G}^\circ_\pi}(u_{\phi,\pi}) \times \prod_{\pi\in I_{GL}} A_{\widehat{G}_\pi}(u_{\phi,\pi}) \ , \\ \widetilde{\eta} &\simeq \boxtimes_{\pi\in I_O}\eta_\pi \boxtimes_{\pi\in I_S} \eta_\pi \boxtimes_{\pi\in I_{GL}} \eta_\pi \ , \\ \eta_0 &\simeq \boxtimes_{\pi\in I_O}\eta_\pi \boxtimes_{\pi\in I_S} \eta_{\pi,0} \boxtimes_{\pi\in I_{GL}} \eta_\pi \ , \end{aligned}$$

et si $\widehat{G}$ est un groupe orthogonal alors

$$
\begin{aligned}
A_{\widehat{G}}(\phi) &\simeq \prod_{\pi\in\widetilde{I}'_O} A_{\widehat{G}_\pi}(u_{\phi,\pi}) \times \prod_{\pi\in I_S} A_{\widehat{G}_\pi}(u_{\phi,\pi}) \times \prod_{\pi\in I_{GL}} A_{\widehat{G}_\pi}(u_{\phi,\pi}) \times A_{\widetilde{G}_O^+}(u_{\phi,O}) \ , \\
A_H(\phi|_{W_F}) &\simeq \prod_{\pi\in\widetilde{I}'_O} A_{\widehat{G}^\circ_\pi}(u_{\phi,\pi}) \times \prod_{\pi\in I_S} A_{\widehat{G}_\pi}(u_{\phi,\pi}) \times \prod_{\pi\in I_{GL}} A_{\widehat{G}_\pi}(u_{\phi,\pi}) \times \prod_{\pi\in\widetilde{I}_O} A_{\widehat{G}^\circ_\pi}(u_{\phi,\pi}) \ , \\
\widetilde{\eta} &\simeq \boxtimes_{\pi\in\widetilde{I}'_O}\eta_\pi \boxtimes_{\pi\in I_S} \eta_\pi \boxtimes_{\pi\in I_{GL}} \eta_\pi \boxtimes \widetilde{\eta}_O \ , \\
\eta_0 &\simeq \boxtimes_{\pi\in\widetilde{I}'_O}\eta_{\pi,0} \boxtimes_{\pi\in I_S} \eta_\pi \boxtimes_{\pi\in I_{GL}} \eta_\pi \boxtimes_{\pi\in\widetilde{I}_O} \eta_{\pi,0} \ .
\end{aligned}
$$

Dans la remarque 2.4, nous avons interprété $\widehat{G}_\pi$ comme le centralisateur de la restriction à W_F de $\pi\boxtimes S_\pi$ dans le groupe des isométries de M_π. Autrement dit, lorsque $\pi\in I$ est fixé, les analogues de $H^G_\phi,\ \widetilde{\eta},\ H_\varphi,\ \theta$ sont respectivement $\widehat{G}_\pi,\ \eta_\pi,\ \widehat{L}_\pi,\ S_{\varphi,\pi})$.
Soit $\pi\in I$.
Supposons que ($\pi\in I_O$ et $\widehat{G}$ symplectique) ou ($\pi\in I_S$ et $\widehat{G}$ orthogonal) ou ($\pi\in I_{GL}$). Dans ce cas, $\widehat{G}_\pi$ est connexe. La construction précédente appliquée à $(u_{\phi,\pi},\chi_{\phi,\pi},\eta_\pi)$ dans le groupe $\widehat{G}_\pi$ associe à ce triplet :

— un sous-groupe de Levi $\widehat{L}_\pi$ de $\widehat{G}_\pi$;

— un morphisme $S_{\varphi,\pi} : \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \longrightarrow \widehat{L}_\pi$;

— une décomposition $\chi_{\phi,\pi}=\chi_{\varphi,\pi}\chi_{c\pi}$;

— une classe unipotente de $\widehat{L}_\pi$ supportant un système local irréductible cuspidal $\widehat{L}_\pi$-équivariant ;

— une représentation irréductible cuspidale $\varepsilon_{\varphi,\pi}$ de $A_{\widehat{L}_\pi}(S_{\varphi,\pi})$;

— une représentation irréductible ρ_π de $N_{\widehat{G}_\pi}(\widehat{L}_\pi)/\widehat{L}_\pi$.

Supposons à présent que ($\pi\in I_O$ et $\widehat{G}$ orthogonal) ou ($\pi\in I_S$ et $\widehat{G}$ symplectique). Dans ce cas, $\widehat{G}_\pi$ (resp. $\widetilde{G}^+_O$) est un groupe orthogonal (resp. un sous-groupe d'un produit de groupes orthogonaux). Dans la construction précédente, on considère la restriction $\eta_{\pi,0}$ (resp. $\boxtimes_{\pi\in\widetilde{I}_O}\eta_{\pi,0}$) de η_π (resp. de $\widetilde{\eta}_O$) à $A_{\widehat{G}^\circ_\pi}(u_{\phi,\pi})$ (resp. $\prod_{\pi\in\widetilde{I}_O} A_{\widehat{G}^\circ_\pi}(u_{\phi,\pi})$) et on associe comme dans le cas précédent tous les objets cités. D'après les théorèmes 1.12 et 1.16, les constructions associées sur la correspondance de Springer généralisée pour le groupe orthogonal, on peut associer de manière bien définie et bijective à $(u_{\phi,\pi},\chi_{\phi,\pi},\eta_\pi)$ (resp. $(u_{\phi,O},\prod_{\pi\in\widetilde{I}_O},\widetilde{\eta}_O)$) les objets suivants :

— un sous-groupe de quasi-Levi $\widehat{L}_\pi$ de $\widehat{G}_\pi$ (resp. $\widetilde{L}^+_O$ de $\widetilde{G}^+_O$) ;

— pour tout $\pi\in I_O$, un morphisme $S_{\varphi,\pi} : \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \longrightarrow \widehat{L}^\circ_\pi$ (et un morphisme $S_{\varphi,O}$: $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \longrightarrow \prod_{\pi\in\widetilde{I}_O}\widehat{L}^\circ_\pi = (\widetilde{L}^+_O)^\circ$) ;

— pour tout $\pi\in I_O$, une décomposition $\chi_{\phi,\pi}=\chi_{\varphi,\pi}\chi_{c\pi}$;

— une classe unipotente de $\widehat{L}^\circ_\pi$ supportant un système local irréductible cuspidal $\widehat{L}^\circ_\pi$-équivariant ;

— une représentation irréductible cuspidale $\varepsilon_{\varphi,\pi}$ de $A_{\widehat{L}_\pi}(S_{\varphi,\pi})$ (resp. $\widetilde{\varepsilon}_{\varphi,O}$ de $A_{\widetilde{L}^+_O}(S_{\varphi,O})$)

— une représentation irréductible ρ_π de $N_{\widehat{G}_\pi}(\widehat{L}_\pi)/\widehat{L}_\pi$ (resp. ρ_O de $N_{\widetilde{G}^+_O}(\widetilde{L}^+_O)/\widetilde{L}^+_O$).

Après avoir interprété la représentation irréductible $\widetilde{\eta}$ de $A_{\widehat{G}}(\phi)$ comme une représentation de $A_{Z_{\widehat{G}}(\phi|_{W_F})}(\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})})$, nous avons associé à $(\phi,\widetilde{\eta})$ un paramètre de Langlands cuspidal φ pour un certain sous-groupe de Levi L de G et les données ci-dessus. À présent, nous allons parcourir le chemin inverse, c'est-à-dire interpréter les données associées ci-dessus en terme d'une représentation irréductible de $A_{\widehat{L}}(\varphi)$ (et d'une représentation d'un groupe de Weyl étendu).

Soit A_π la composante déployée de $\widehat{L}_\pi$, $A = \prod_{\pi\in I} A_\pi$, $\widehat{L}_* = Z_{\widehat{G}_*}(A)$, $\widehat{L} = Z_{\widehat{G}}(A)$ et $A_O = \prod_{\pi\in\widetilde{I}_O} A_\pi$.

Nous avons vu que la forme de ces sous-groupes de Levi (ou de quasi-Levi) sont

$$\widehat{L}_\pi = (\mathbf{C}^\times)^{\ell_\pi} \times \widehat{G}'_\pi,$$

avec $\widehat{G}'_\pi$ un groupe de même type que $\widehat{G}_\pi$. Le cocaractère non ramifié $\chi_{c\pi}$ de W_F est à valeur dans A_π. On peut écrire sa décomposition à travers le plongement $\widehat{L}_\pi$ naturel dans un groupe linéaire associé :

$$\chi_{c\pi} = \bigoplus_{\xi\in K_\pi} \xi \oplus \xi^{-1} \bigoplus m'_\pi 1,$$

avec K_π un ensemble de l_π cocaractères non-ramifiés de W_F et m'_π est la dimension de l'espace pour lequel $\widehat{G}'_\pi$ est le groupe des isométries. Le paramètre φ construit est donc

$$\varphi = \bigoplus_{\pi\in I} \left(\bigoplus_{\xi\in K_\pi} (\pi\xi) \oplus (\pi\xi)^\vee \bigoplus \pi \boxtimes S'_{\varphi,\pi} \right),$$

avec $S'_{\varphi,\pi}$ la factorisation de $S_{\varphi,\pi}$ à travers $\widehat{G}'_\pi$. Le sous-groupe de Levi $\widehat{L}$ est de la forme :

$$\widehat{L} = \prod_{\pi\in I} \mathrm{GL}_{d_\pi}(\mathbf{C})^{\ell_\pi} \times \widehat{G}',$$

et

$$\widehat{L}_* = \prod_{\pi\in I} \mathrm{GL}_{d_\pi}(\mathbf{C})^{\ell_\pi} \times \widehat{G}'_*,$$

avec $\widehat{G}$ un groupe de même type que $\widehat{G}$, $\widehat{G}'_*$ défini de façon analogue à $\widehat{G}_*$ et d_π est la dimension de π. Ainsi,

$$A_{\widehat{L}_*}(\varphi) \simeq \prod_{\pi\in I} A_{\widehat{L}_\pi}(S_{\varphi,\pi}).$$

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\pi\in I} A_{\widehat{G}_\pi}(u_{\phi,\pi}) \arrow[d] & A_{\widehat{G}_*}(\phi) \arrow[l] \arrow[d] & A_{\widehat{G}}(\phi) \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads] \arrow[d, dotted] & \mathcal{S}_\phi^G \arrow[d, dotted] \\
\prod_{\pi\in I} A_{\widehat{L}_\pi}(u_{\varphi,\pi}) & A_{\widehat{L}_*}(\varphi) \arrow[l, hook'] & A_{\widehat{L}}(\varphi) \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads] & \mathcal{S}_\varphi^L
\end{tikzcd}$$

Si $\widehat{G}$ est un groupe symplectique, on peut donc écrire

$$A_{\widehat{L}}(\varphi) \simeq \prod_{\pi\in I} A_{\widehat{L}_\pi}(S_{\varphi,\pi}),$$

et si $\widehat{G}$ est un groupe orthogonal,

$$A_{\widehat{L}}(\varphi) \simeq \prod_{\pi\in I\setminus\widetilde{I}_O} A_{\widehat{L}_\pi}(S_{\varphi,\pi}) \times A_{\widetilde{L}_O^+}(S_{\varphi,O}).$$

À travers ces isomorphismes, nous pouvons donc définir une représentation irréductible cuspidale $\widetilde{\varepsilon}$ de $A_{\widehat{L}}(\varphi)$ correspondant à $\boxtimes_{\pi\in I}\varepsilon_{\varphi,\pi}$ dans le cas où $\widehat{G}$ est un groupe symplectique et à $\boxtimes_{\pi\in I\setminus\widetilde{I}_O}\varepsilon_{\varphi,\pi}\boxtimes\widetilde{\varepsilon}_{\varphi,O}$ dans le cas où $\widehat{G}$ est un groupe orthogonal.

Il s'agit de voir à présent que ε se factorise en une représentation de $\mathcal{S}_{\varphi}^{L}$. Lorsque $\widehat{G}=\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbf{C})$, il n'y a rien puisque son centre est connexe (il est trivial) et il en est de même pour $\widehat{L}$.
Soit $\pi\in I$. Supposons que $\widehat{G}_\pi$ est un groupe symplectique. D'après [Lus95a, 5.23], -1 agit sur η_π par le même scalaire que sur ε_π. Ainsi, $\eta_\pi(-1)=\varepsilon_\pi(-1)$. Supposons que $\widehat{G}_\pi$ est un groupe orthogonal. La construction de la correspondance de Springer pour le groupe orthogonal de la section 1.12 permet d'affirmer que l'on a aussi $\eta_\pi(-1)=\varepsilon_\pi(-1)$ et $\widetilde{\eta}_O(-1)=\widetilde{\varepsilon}_O(-1)$. Ainsi, on a :

$$1=\widetilde{\eta}(-1)=\prod_{\pi\in I}\eta_\pi(-1)=\prod_{\pi\in I}\varepsilon_\pi(-1)=\widetilde{\varepsilon}(-1),$$

et

$$1=\widetilde{\eta}(-1)=\widetilde{\eta}_O(-1)\prod_{\pi\in I\setminus\widetilde{I}_O}\eta_\pi(-1)=\widetilde{\varepsilon}_O(-1)\prod_{\pi\in I\setminus\widetilde{I}_O}\varepsilon_\pi(-1)=\widetilde{\varepsilon}(-1).$$

Par suite, $\widetilde{\varepsilon}$ se factorise en une représentation irréductible ε de $\mathcal{S}_{\varphi}^{L}$.

Revenons à présent sur la représentation du groupe de Weyl. On a :

$$N_{Z_{\widehat{G}_*}(\phi|_{W_F})}(A)\simeq\prod_{\pi\in I}N_{\widehat{G}_\pi}(A_\pi)\quad\text{et}\quad Z_{\widehat{L}_*}(\phi|_{W_F})=Z_{Z_{\widehat{G}_*}(\phi|_{W_F})}(A)\simeq\prod_{\pi\in I}Z_{\widehat{G}_\pi}(A_\pi)\simeq\prod_{\pi\in I}\widehat{L}_\pi.$$

De plus,

$$\widetilde{L}_O^+=\widetilde{G}_O^+\cap\prod_{\pi\in\widetilde{I}_O}\widehat{L}_\pi=Z_{\widetilde{G}_O^+}(A_O).$$

Ainsi, lorsque $\widehat{G}$ est un groupe symplectique, on a :

$$W_{Z_{\widehat{L}}(\phi|_{W_F})}^{Z_{\widehat{G}}(\phi|_{W_F})}\simeq\prod_{\pi\in I}W_{\widehat{L}_\pi}^{\widehat{G}_\pi},$$

et lorsque $\widehat{G}$ est un groupe orthogonal, on a :

$$W_{Z_{\widehat{L}}(\phi|_{W_F})}^{Z_{\widehat{G}}(\phi|_{W_F})}\simeq\prod_{\pi\in I\setminus\widetilde{I}_O}W_{\widehat{L}_\pi}^{\widehat{G}_\pi}\times W_{\widetilde{L}_O^+}^{\widetilde{G}_O^+}.$$

Comme précédemment, on peut définir à travers ces isomorphismes une représentation irréductible ρ de $W_{Z_{\widehat{L}}(\phi|_{W_F})}^{Z_{\widehat{G}}(\phi|_{W_F})}$ à partir des représentations irréductibles ρ_π de $W_{\widehat{L}_\pi}^{\widehat{G}_\pi}$.

Chapitre 5

Conjecture d'Aubert-Baum-Plymen-Solleveld

5.1 Quotients étendus

Soit Γ un groupe fini agissant sur une variété complexe affine T par automorphisme de variété affine. Le quotient de T pour l'action Γ désigne l'ensemble des classes d'équivalences T pour Γ ; une classe d'équivalence est formée par les images de l'action de tous les éléments de Γ sur un élément de T. Baum et Connes ont défini dans [BC88], le quotient étendu de T pour l'action de Γ qui désigne les classes d'équivalences pour une certaine relation, une classe étant constituée de l'image de l'action des éléments d'une classe de conjugaison de Γ sur un élément de T.
Posons

$$X = \{(t,\gamma) \in T \times \Gamma,\ \gamma t = t\}.$$

Alors Γ agit de la façon suivante sur X :

$$\alpha(t,\gamma) = (\alpha t, \alpha\gamma\alpha^{-1}),\ \ \alpha \in \Gamma, (t,\gamma) \in X.$$

Définition 5.1 (Quotient étendu géométrique)**.** Avec les notations précédentes, on appelle quotient étendu (géométrique) de T pour l'action de Γ et on note $T /\!\!/ \Gamma$ le quotient X/Γ.

Donnons quelques propriétés de cet objet. Tout d'abord, la projection sur la première composante, $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & T \\ (t,\gamma) & \longmapsto & t \end{array}$, est Γ-équivariante et fournit une surjection $\mathbf{p} : T /\!\!/ \Gamma \longrightarrow T/\Gamma$.

Par ailleurs, si $\gamma \in \Gamma$ on pose $T^\gamma = \{t \in T,\ \gamma x = x\}$ et $Z_\Gamma(\gamma) = \{\alpha \in \Gamma,\ \alpha\gamma\alpha^{-1} = \gamma\}$ le centralisateur de γ dans Γ. Notons $\underline{\underline{\Gamma}}$ l'ensemble des classes de conjugaison de Γ. On a une bijection

$$T /\!\!/ \Gamma \simeq \bigsqcup_{[\gamma]\in\underline{\underline{\Gamma}}} T^\gamma / Z_\Gamma(\gamma),$$

où $\gamma \in \Gamma$ parcourt un système de représentants des classes de conjugaison de Γ. En particulier, $T^{1_\Gamma}/Z_\Gamma(1_\Gamma) = T/\Gamma$, d'où $T/\Gamma \subseteq T /\!\!/ \Gamma$. Cet inclusion correspond au passage au quotient de l'inclusion Γ-équivariante $\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & (t, 1_\Gamma) \end{array}$.

À présent, on définit le même objet que précédemment en remplaçant les classes de conjugaison de Γ par des représentations irréductibles. Pour $t \in T$, notons $\Gamma_t = \{\gamma \in \Gamma,\ \gamma t = t\}$

le stabilisateur de t pour l'action de Γ et posons

$$Y = \{(t, \rho),\ t \in T,\ \rho \in \mathbf{Irr}(\Gamma_t)\}.$$

Pour tout $t \in T,\ \gamma \in \Gamma,\ \Gamma_{\gamma t} = \gamma^{-1}\Gamma_t\gamma$. Comme précédemment, Γ agit sur Y par

$$\gamma(t, \rho) = (\gamma t, \gamma^*\rho),\ \ \gamma \in \Gamma, (t, \rho) \in Y,$$

où on a noté $\gamma^*\rho$ la représentation irréductible de $\Gamma_{\gamma t}$ définie pour tout $\alpha \in \Gamma_{\gamma t}$, par $(\gamma^*\rho)(\alpha) = \rho(\gamma\alpha\gamma^{-1})$.

Définition 5.2 (Quotient étendu spectral)**.** Avec les notations précédentes, on appelle quotient étendu (spectral) de T pour l'action de Γ et on note $T /\!\!/ \widehat{\Gamma}$ le quotient Y/Γ.

La projection sur la première composante, $\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & T \\ (t,\gamma) & \longmapsto & t \end{array}$, est Γ-équivariante et fournit une surjection $\mathbf{p} : T /\!\!/ \widehat{\Gamma} \longrightarrow T/\Gamma$. Enfin, pour $t \in T$, si on note triv_t la représentation triviale de Γ_t, l'inclusion Γ-équivariante $\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & Y \\ t & \longmapsto & (t, \mathrm{triv}_t) \end{array}$, fournit une inclusion $T/\Gamma \hookrightarrow T /\!\!/ \widehat{\Gamma}$.

5.2 Conjecture d'Aubert-Baum-Plymen-Solleveld

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps local non-archimédien F, quasi-déployé. Considérons $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$ une paire inertielle, $T_\mathfrak{s}$ (resp. $W_\mathfrak{s}$) le tore complexe (resp. le groupe fini) associé.

Conjecture 5.3 (Aubert-Baum-Plymen-Solleveld)**.** — *Le caractère infinitésimal* $\mathbf{Sc}$: $\mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s} \longrightarrow T_\mathfrak{s}/W_\mathfrak{s}$ *est bijectif, si et seulement si,* $W_\mathfrak{s}$ *agit librement sur* $T_\mathfrak{s}$ *;*

— *Il existe une bijection « canonique »*

$$\mu_\mathfrak{s} : T_\mathfrak{s} /\!\!/ \widehat{W_\mathfrak{s}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s};$$

vérifiant les propriétés suivantes

(a) L'application $\mu_\mathfrak{s}$ induit une bijection entre $K_\mathfrak{s} /\!\!/ W_\mathfrak{s}$ et $\mathbf{Irr}(G)_{\mathfrak{s},\mathrm{temp}}$, avec $K_\mathfrak{s}$ le sous-groupe compact maximal de $T_\mathfrak{s}$ et $\mathbf{Irr}(G)_{\mathfrak{s},\mathrm{temp}} = \mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s} \cap \mathbf{Irr}(G)_{\mathrm{temp}}$;

(b) Soit $\mathfrak{s} = [M, \sigma] \in \mathcal{B}(G)$ et $\varphi_\sigma : W'_F \longrightarrow \widehat{M}$ le paramètre de Langlands de σ. Soit $\mathcal{CU}$ un système de représentants des classes unipotentes de $Z_{\widehat{G}}(\phi^{\mathrm{ss}}_\sigma\chi)^\circ$, lorsque χ parcourt $\mathfrak{X}(\widehat{M})$. Il existe alors une partition de $T_\mathfrak{s} /\!\!/ W_\mathfrak{s}$ indexée par $\mathcal{CU}$ telle que :

— $T_\mathfrak{s} /\!\!/ W_\mathfrak{s} = \coprod_{\mathcal{U} \in \mathcal{CU}} (T_\mathfrak{s} /\!\!/ W_\mathfrak{s})_\mathcal{U}$

— *pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{CU}$, $(T_\mathfrak{s} /\!\!/ W_\mathfrak{s})_\mathcal{U}$ est réunion de composantes irréductibles de la variété $T_\mathfrak{s} /\!\!/ W_\mathfrak{s}$ (éventuellement vide).*

(c) Pour tout $\mathfrak{s} = [M, \sigma] \in \mathcal{B}(G)$, il y a une famille algébrique

$$\theta_z : T_\mathfrak{s} /\!\!/ W_\mathfrak{s} \longrightarrow T_\mathfrak{s}/W_\mathfrak{s},$$

de morphismes finis de variétés algébriques, avec $z \in \mathbf{C}^\times$, tels que :

$$\theta_1 = \mathbf{p}_\mathfrak{s},$$

$$\theta_{\sqrt{q}} = \mathbf{Sc} \circ \mu_{\mathfrak{s}} \quad et \quad \theta_{\sqrt{q}}(T_{\mathfrak{s}} /\!/ W_{\mathfrak{s}} - T_{\mathfrak{s}}/W_{\mathfrak{s}}) = \mathfrak{R}_{\mathfrak{s}},$$

où q est le cardinal du corps résiduel du corps local F sur lequel le groupe G est défini et $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}} \subset T_{\mathfrak{s}}/W_{\mathfrak{s}}$ est la sous-variété de réductibilité, constituée des caractères non ramifiés χ pour lesquels l'induite parabolique de $\sigma \otimes \chi$ est réductible. En particulier, le nombre de constituant irréductible de $i_P^G(\sigma \otimes \chi)$ est $\#\theta_{\sqrt{q}}^{-1}(\chi)$;

(d) *Soit $Y_1, \ldots, Y_r$ les composantes irréductibles de $Y_{\mathfrak{s}}$ (notation de la section précédente). Les morphismes θ_z vérifient la propriété suivante : pour toute composante irréductible Y_i, il existe un cocaractère $c_i : \mathbf{C}^\times \longrightarrow T_{\mathfrak{s}}$ tels que pour tout $(t, \rho) \in Y_i$, on a :*

$$\theta_z(t, \rho) = W_{\mathfrak{s}} \cdot (c_i(z)t).$$

(e) *Soient $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$ et $r, s \in T_{\mathfrak{s}} /\!/ W_{\mathfrak{s}}$. Alors les représentations $\mu_{\mathfrak{s}}(r)$ et $\mu_{\mathfrak{s}}(t)$ sont dans le même L-paquets si et seulement si il existe $\mathcal{U} \in \mathcal{CU}$ tel que $r, s \in (T_{\mathfrak{s}} /\!/ W_{\mathfrak{s}})_{\mathcal{U}}$ et pour tout $z \in \mathbf{C}^\times, \theta_z(r) = \theta_z(s)$.*

Remarque 5.4. Il n'y a pas de multiplication naturelle dans $T_{\mathfrak{s}} = \{\sigma \otimes \chi, \chi \in \mathfrak{X}(M)\}$. Dans la propriété (d) précédente, le produit $c_i(z)t$ est le produit de $c_i(z)$ et t dans le groupe algébrique $T_{\mathfrak{s}}$.

5.3 Analogue galoisien de la conjecture d'Aubert-Baum-Plymen-Solleveld

Notons G l'un des groupes $\mathrm{Sp}_N(F)$, $\mathrm{SO}_N(F)$. Soit $\mathscr{j} = [\widehat{L}, \varphi, \varepsilon]$ une L-donnée cuspidale de $\widehat{G}$. Notons $\mathcal{T}_{\mathscr{j}}$ le tore et $\mathcal{W}_{\mathscr{j}}$ le groupe de Weyl associé à cette donnée et $\Phi(G)^+_{\mathscr{j}}$ l'ensemble des classes de paramètres de Langlands complets (ϕ, η) tels que :

$$\mathscr{Sc}(\phi, \eta) = (\widehat{L}, \varphi, \varepsilon),$$

c'est-à-dire l'ensemble des classes de paramètres de Langlands complets $(\phi, \eta) \in \Phi(G)^+$ tels qu'il existe $\chi \in \mathfrak{X}(\widehat{L})$ vérifiant $\mathscr{Sc}(\phi, \eta) = (\widehat{L}, \varphi\chi, \varepsilon)$. Nous allons considérer le quotient étendu spectral de $\mathcal{T}_{\mathscr{j}}$ par $\mathcal{W}_{\mathscr{j}}$. Notons $\mathbf{p}_{\mathscr{j}} : \mathcal{T}_{\mathscr{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}}_{\mathscr{j}} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathscr{j}}/\mathcal{W}_{\mathscr{j}}$ la projection définie en 5.1. Rappelons qu'on avait vu dans la remarque 4.20, que $\mathcal{W}_{\mathscr{j},\varphi\chi} \simeq N_{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F}\chi)}(A_{\widehat{L}})/Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F}\chi)$.

Théorème 5.5. *1. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mu_{\mathscr{j}} : & \Phi(G)^+_{\mathscr{j}} & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\mathscr{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}}_{\mathscr{j}} \\ & \kappa = (\phi, \eta) & \longmapsto & ((\phi_{|W_F})_{\widehat{L}}, \rho_\kappa) \end{array},$$

où ρ_κ est la représentation du groupe de Weyl du théorème 4.27, est bien définie, bijective et vérifie les propriétés suivantes :

(a) *L'application $\mu_{\mathscr{j}}$ induit une bijection entre $\mathcal{K}_{\mathscr{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}}_{\mathscr{j}}$ et $\Phi(G)^+_{\mathscr{j},\mathrm{bdd}}$, avec $\mathcal{K}_{\mathscr{j}}$ le sous-groupe compact maximal de $\mathcal{T}_{\mathscr{j}}$ et $\Phi(G)^+_{\mathscr{j},\mathrm{bdd}}$ l'ensemble des (classes de) de paramètres de Langlands tempérés ;*

(b) *L'application $\mu_{\mathscr{j}}$ induit naturellement une décomposition*

$$\mathcal{T}_{\mathscr{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}}_{\mathscr{j}} = \bigsqcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{CU}} \left(\mathcal{T}_{\mathscr{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}}_{\mathscr{j}}\right)_{\mathcal{U}},$$

où $\mathcal{CU}$ est la réunion des des orbites unipotentes de $Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F}\chi)^\circ$, lorsque χ varie dans $\mathfrak{X}(\widehat{L})$ et pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{CU}$,

$$\left(\mathcal{T}_{\mathfrak{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}_{\mathfrak{j}}}\right)_{\mathcal{U}} = \mu_{\mathfrak{j}}\left(\Phi(G)^+_{\mathfrak{j},\mathcal{U}}\right).$$

(c) *pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{CU}$, $\left(\mathcal{T}_{\mathfrak{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}_{\mathfrak{j}}}\right)_{\mathcal{U}}$ est réunion de composantes irréductibles de la variété $\mathcal{T}_{\mathfrak{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}_{\mathfrak{j}}}$ (éventuellement vide).*

(d) *Pour tout $\mathfrak{j} \in \mathcal{B}(\widehat{G})^+$ et tout $z \in \mathbf{C}^\times$, notons*

$$\begin{array}{cccc} \theta_z : & \mathcal{T}_{\mathfrak{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}_{\mathfrak{j}}} & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\mathfrak{j}}/\mathcal{W}_{\mathfrak{j}} \\ & ((\varphi_{|W_F}\chi)_{\widehat{L}}, \rho) & \longmapsto & \mathcal{W}_{\mathfrak{j}} \cdot (\varphi_{|W_F}\chi c_\rho(z)^{-1})_{\widehat{L}} \end{array},$$

avec c_ρ le cocaractère correcteur de φ dans $\widehat{G}$ tel que ρ soit une représentation irréductible de $N_{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F}\chi\chi_c)}(A_{\widehat{L}})/Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F}\chi\chi_c)$. Cette famille de morphismes est telle que :

$$\theta_1 = \mathbf{p}_{\mathfrak{j}},$$

$$\mathcal{L}_c = \theta_{\sqrt{q}} \circ \mu_{\mathfrak{j}}$$

(e) *Soient $\mathfrak{j} \in \mathcal{B}(\widehat{G})^+$ et $r, s \in \mathcal{T}_{\mathfrak{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}_{\mathfrak{j}}}$. Alors les représentations $\mu_{\mathfrak{j}}(r)$ et $\mu_{\mathfrak{j}}(s)$ sont dans le même L-paquet, si et seulement si, il existe $\mathcal{U} \in \mathcal{CU}$ tel que $r, s \in \left(\mathcal{T}_{\mathfrak{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}_{\mathfrak{j}}}\right)_{\mathcal{U}}$ et pour tout $z \in \mathbf{C}^\times, \theta_z(r) = \theta_z(s)$.*

Démonstration. Fixons $\varphi : W'_F \longrightarrow \widehat{L}$ un paramètre cuspidal de L et soit $\phi \in \Phi(G)_{\mathfrak{j}}$. Quitte à conjuguer, on peut supposer que $\phi|_{W_F} = \varphi_{|W_F}\chi\chi_c$, où $\chi \in \mathfrak{X}(\widehat{L})$ et χ_c est le cocaractère non ramifié de W_F obtenue à partir du cocaractère correcteur de φ associé à ϕ. Nous avons vu que le stabilisateur de $(\varphi\chi\chi_c)_{\widehat{L}}$ dans $\mathcal{W}_{\mathfrak{j}}$ est :

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{j},\varphi\chi\chi_c} \simeq N_{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F}\chi\chi_c)}(A_{\widehat{L}})/Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F}\chi\chi_c) \simeq W^{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F}\chi\chi_c)}_{Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F}\chi\chi_c)}.$$

Or, d'après le théorème 4.27, les représentations irréductibles de $W^{Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F}\chi\chi_c)}_{Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F}\chi\chi_c)}$ paramètrent exactement les couples $(\phi, \eta) \in \Phi(G)^+$ de support cuspidal $(\widehat{L}, \varphi\chi, \varepsilon)$, avec $\phi|_{W_F} = \varphi_{|W_F}\chi\chi_c$. Ceci montre que l'application $\mu_{\mathfrak{j}}$ est bien définie et bijective.
Les propriétés que vérifie cette bijection sont évidentes car tout a été fait pour. En effet, la propriété (a) est évidente vu la définition de $\mu_{\mathfrak{j}}$. Pour les propriétés (b) et (c), ceci résulte du fait qu'une fois fixé φ, les paramètres de Langlands de G qui admettent pour support cuspidal φ sont caractérisés uniquement par leurs restrictions à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, c'est-à-dire l'orbite unipotente associé.
Concernant le point (d) ceci résulte de la définition même de l'application de support cuspidal pour les paramètres de Langlands complets et de $c(q^{1/2})^{-1} = c(||\mathrm{Fr}||^{1/2}) = \chi_c(\mathrm{Fr})$.
Enfin, pour la propriété (e), il est clair que si $\mu_{\mathfrak{j}}(r)$ et $\mu_{\mathfrak{j}}(s)$ sont dans un même L-paquet (ou plutôt ont le même paramètre de Langlands), alors ils sont dans la même part de la partition et vérifie le second point abordé. Réciproquement, s'ils sont dans la même part de la partition du quotient étendu, puisque c ne dépend que de $\mathcal{U}$, la second propriété indique qu'ils ont même restriction à W_F et donc même paramètre de Langlands.

□

5.4 Paramétrage de Langlands du dual admissible des groupes classiques

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les pour les groupes classiques, les paramètres de Langlands des représentations supercuspidales correspondent aux paramètres de Langlands « cuspidaux » (définition 4.11). Par ailleurs, d'une part nous savons par les travaux d'Heiermann que les représentations irréductibles dans un bloc de Bernstein correspondent aux modules irréductibles d'une algèbre de Hecke affine à paramètres étendue. D'autre part, par les travaux de Lusztig (et le théorème 4.27), nous avons un paramètrage des modules irréductibles d'une algèbre de Hecke graduée étendue par des paramètres de Langlands complets. Dans ce qui suit, on compare les paramètres et on relie les deux paramétrages à l'aide des quotients étendus. Ceci prouvera la conjecture ABPS dans le cas des groupes classiques.

Pour commencer, nous allons montrer le théorème suivant.

Théorème 5.6. *Soit G l'un des groupes $\mathrm{SO}_N(F)$ ou $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ et $\mathfrak{s} = [L, \sigma] \in \mathcal{B}(G)$. Notons $\mathscr{j} = [\widehat{L}, \varphi_\sigma, \varepsilon_\sigma] \in \mathcal{B}(G)^+_{\mathrm{st}}$ la L-donnée inertielle complète correspondante et $T_\mathfrak{s}, \mathcal{T}_\mathscr{j}, W_\mathfrak{s}, \mathcal{W}_\mathscr{j}$ les tores de Bernstein et groupes de Weyl définis précédemment.*
On a un isomorphisme $\mathcal{W}_\mathscr{j} \simeq W_\mathfrak{s}$ compatible avec les actions de chacun sur $\mathcal{T}_\mathscr{j}$ et $T_\mathfrak{s}$. Plus précisément, la conjecture 4.16 est vérifiée.

Démonstration. Nous reprenons les notations de la section 3.5 (sauf que l'on note L au lieu de M) et nous admettons la correspondance de Langlands pour les représentations supercuspidales des groupes classiques et linéaires.
Soit G l'un des groupes $\mathrm{SO}_N(F)$ ou $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$, soit $L = \prod_{i=1}^r \mathrm{GL}_{d_i}(F)^{\ell_i} \times G_{n'}$, un sous-groupe de Levi de G, avec $n' \leqslant N$ et soit

$$\sigma = \underbrace{\sigma_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_1}_{\ell_1} \boxtimes \ldots \boxtimes \underbrace{\sigma_r \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_r}_{\ell_r} \boxtimes \tau,$$

une représentation irréductible supercuspidale unitaire de L, avec σ_i une représentation irréductible supercuspidale de GL_{d_i} et τ une représentation irréductible supercuspidale de $G_{n'}$. On suppose par ailleurs que σ est décomposée selon la condition (C) de la section 3.5.

Notons $\widehat{L} = \prod_{i=1}^r \mathrm{GL}_{d_i}(\mathbf{C})^{\ell_i} \times \widehat{G}_{n'}$ le dual de Langlands de L et $N_G = \sum_{i=1}^r \ell_i d_i + n'$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, soit

— $\pi_i : W_F \longrightarrow \mathrm{GL}_{d_i}(\mathbf{C})$ un paramètre de Langlands cuspidal de σ_i ;

— $\varphi_\tau : W'_F \longrightarrow \widehat{G}_{n'}$ un paramètre de Langlands cuspidal de τ ;

— $\varphi_\sigma : W'_F \longrightarrow \widehat{L}$ un paramètre de Langlands de σ.

Décomposons un plongement de φ_σ dans $\mathrm{GL}_{N_G}(\mathbf{C})$:

$$\begin{aligned}\varphi &= \underbrace{(\pi_1 \oplus \pi_1^\vee) \oplus \ldots \oplus (\pi_1 \oplus \pi_1^\vee)}_{\ell_1} \oplus \ldots \oplus \underbrace{(\pi_r \oplus \pi_r^\vee) \oplus \ldots \oplus (\pi_r \oplus \pi_r^\vee)}_{\ell_r} \oplus \varphi_\tau \\ &= \bigoplus_{i=1}^r \ell_i(\pi_i \oplus \pi_i^\vee) \bigoplus \varphi_\tau\end{aligned}$$

Notons $\mathcal{O}_{\pi_i} = \{\pi_i\chi, \chi \in \mathfrak{X}(\mathrm{GL}_{d_i}(\mathbf{C}))\}$. La condition (C) (p. 47) se traduit sur les paramètres de Langlands par :

— pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, si $\mathcal{O}_{\pi_i} = \mathcal{O}_{\pi_i^\vee}$, alors $\pi_i = \pi_i^\vee$, i.e. π est de type symplectique ou orthogonal ;

— pour tout $i,j \in [\![1,r]\!]$, si $i \neq j$, alors $\pi_i \neq \pi_j$, $\pi_i \neq \pi_j^\vee$;

D'après la correspondance de Langlands pour le groupe linéaire, on a $\mathfrak{X}(\mathrm{GL}_{d_i}(F))(\sigma_i) \simeq \mathfrak{X}(\mathrm{GL}_{d_i}(\mathbf{C}))(\pi_i)$. Ainsi, la correspondance de Langlands pour les caractères et ce qui précéde montre que $T_{\mathfrak{s}} \simeq \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$.

Soit I l'ensemble des représentations irréductibles de W_F apparaissant dans la restriction de φ à W_F. On a vu qu'on peut décomposer $I = I_O \sqcup I_S \sqcup I_{GL}$. Décomposons de la même manière φ_τ :

$$\begin{aligned}\varphi_\tau &= \bigoplus_{(\pi,q)\in\mathrm{Jord}(\varphi_\tau)} \pi \boxtimes S_q \\ &= \bigoplus_{\pi\in I_\tau} \pi \boxtimes S_\pi,\end{aligned}$$

avec I_τ l'ensemble des représentations irréductibles de W_F apparaissant dans la restriction de φ à W_F (elles sont de type orthogonal ou symplectique) et $S_\pi = \bigoplus_{q|(\pi,q)\in\mathrm{Jord}(\varphi_\tau)} S_q$.

Notons $I_L = \{\pi_i, i \in [\![1,r]\!]\}$. Pour tout $\pi \in I_L$, notons $\ell_\pi = \ell_i$ et pour tout $\pi \in I\backslash I_L$, $\ell_\pi = 0$. Pour tout $\pi \in I_\tau$, notons $m_\pi = \sum_{q|(\pi,q)\in\mathrm{Jord}(\varphi_\tau)} q$ et pour tout $\pi \in I\backslash I_\tau$, $m_\pi = 0$. Puisque φ_τ est sans multiplicité, il y a au plus un π_i qui apparait dans cette décomposition. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\varphi &= \bigoplus_{\pi\in I_O\sqcup I_S} (2\ell_\pi\pi \oplus \pi\boxtimes S_\pi) \bigoplus_{\pi\in I_{GL}} \ell_\pi(\pi\oplus\pi^\vee) \\ \varphi_{|W_F} &= \bigoplus_{\pi\in I_O\sqcup I_S} (2\ell_\pi + m_\pi)\pi \bigoplus_{\pi\in I_{GL}} \ell_\pi(\pi\oplus\pi^\vee)\end{aligned}$$

Supposons $G = \mathrm{SO}_{2n+1}(F)$. Dans ce cas, $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})$ On obtient ainsi :

$$Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F}) \simeq \prod_{\pi\in I_O} \mathrm{Sp}_{2\ell_\pi+m_\pi} \times \prod_{\pi\in I_S} \mathrm{O}_{2\ell_\pi+m_\pi} \times \prod_{\pi\in I_{GL}} \mathrm{GL}_{d_\pi}$$

$$Z_{\widehat{L}}(\varphi_{|W_F}) \simeq \prod_{\pi\in I_O} \left((\mathbf{C}^\times)^{\ell_\pi} \times \mathrm{Sp}_{m_\pi}\right) \times \prod_{\pi\in I_S} \left((\mathbf{C}^\times)^{\ell_\pi} \times \mathrm{O}_{m_\pi}\right) \times \prod_{\pi\in I_{GL}} (\mathbf{C}^\times)^{\ell_\pi}$$

Remarquons que $\pi_i \notin \mathrm{Jord}(\varphi_\tau)$, si et seulement si, $m_{\pi_i} = 0$. Décrivons dans le tableau ci-dessous le système de racines, ainsi que le groupe de Weyl (étendue) associé par la correspondance de Springer généralisée et les travaux de Lusztig.

$\widehat{G}_\pi$	$\widehat{L}_\pi$	condition	R	R_{red}	W°	W	
$\mathrm{Sp}_{2\ell+m}$	$(\mathbf{C}^\times)^\ell \times \mathrm{Sp}_m$	$\ell = 0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{1\}$	
		$\ell \neq 0, m = 0$	C_ℓ	C_ℓ	W_{C_ℓ}	W_{C_ℓ}	(1)
		$\ell \neq 0, m \neq 0$	BC_ℓ	B_ℓ	W_{B_ℓ}	W_{B_ℓ}	(2)
$\mathrm{O}_{2\ell+m}$	$(\mathbf{C}^\times)^\ell \times \mathrm{O}_m$	$\ell = 0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{1\}$	
		$\ell \neq 0, m = 0$	D_ℓ	D_ℓ	W_{D_ℓ}	$W_{D_\ell} \rtimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$	(3)
		$\ell \neq 0, m \neq 0$	BC_ℓ	B_ℓ	W_{B_ℓ}	W_{B_ℓ}	(4)
GL_ℓ	$(\mathbf{C}^\times)^\ell$	$\ell \leqslant 1$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{1\}$	
		$\ell \geqslant 2$	$A_{\ell-1}$	$A_{\ell-1}$	$W_{A_{\ell-1}}$	$W_{A_{\ell-1}}$	(5)

La forme particulière qu'on a imposé à φ_σ montre que $D_\varphi^G = H_\varphi^G$. Écrivons $a = (a_{i,j})_{i\in[\![1,r]\!],j\in[\![1,\ell_i]\!]}$, pour tout $i \in [\![1,r]\!], j \in [\![1,\ell_i - 1]\!]$, notons $\widehat{s}_{i,j} \in N_{Z_{H_\varphi^G}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})}(A_{\widehat{L}})/Z_{H_\varphi^L}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$ dont l'action sur a permute les éléments $a_{i,j}$ et $a_{i,j+1}$ et $\widehat{s}_{i,\ell_i} \in N_{Z_{H_\varphi^{G*}}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})}(A_{\widehat{L}})/Z_{H_\varphi^{L*}}(\varphi_{|\mathrm{SL}_2})$ dont l'action sur a permute l_{i,ℓ_i} et a_{i,ℓ_i}^{-1}. L'action de ces éléments sur un paramètre de Langlands de L de la forme

$$\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=1}^{\ell_i}\left(\pi_{i,j} \oplus \pi_{i,j}^\vee\right)\bigoplus \varphi_\tau,$$

est la suivante :

— pour tout $i \in [\![1,r]\!], j \in [\![1,\ell_i - 1]\!]$, $\widehat{s}_{i,j}$ permute $\pi_{i,j}$ et $\pi_{i,j+1}$ (et $\pi_{i,j}^\vee$ et $\pi_{i,j+1}^\vee$) ;

— pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $\widehat{s}_{i,\ell_i}$ permute π_{i,ℓ_i} et $\pi_{i,\ell_i}^\vee$.

La table précédente nous montre en particulier que $\mathcal{W}_{\mathcal{J}}^\circ$ est le produit direct de $\mathcal{W}_{\mathcal{J},i}^\circ(\simeq W_{\widehat{L}_{\pi_i}^\circ}^{\widehat{G}_{\pi_i}^\circ})$ et

$$\mathcal{W}_{\mathcal{J},i}^\circ = \begin{cases} \langle \widehat{s}_{i,j}, j \in [\![1,\ell_i]\!]\rangle & \text{si } W_{\widehat{L}_{\pi_i}^\circ}^{\widehat{G}_{\pi_i}^\circ} \text{ est de type } B_{\ell_i}/C_{\ell_i} \\ \langle \widehat{s}_{i,j}, j \in [\![1,\ell_i - 1]\!],\ \widehat{s}_{i,\ell_i}\widehat{s}_{i,\ell_i-1}\widehat{s}_{i,\ell_i}^{-1}\rangle & \text{si } W_{\widehat{L}_{\pi_i}^\circ}^{\widehat{G}_{\pi_i}^\circ} \text{ est de type } D_{\ell_i} \\ \langle \widehat{s}_{i,j}, j \in [\![1,\ell_i - 1]\!]\rangle & \text{si } W_{\widehat{L}_{\pi_i}^\circ}^{\widehat{G}_{\pi_i}^\circ} \text{ est de type } A_{\ell_i-1} \end{cases}$$

Concernant $R_{\mathcal{J}}$, on considère les mêmes définitions pour $R_{\mathfrak{s}}$ que dans la section 3.5. De plus, si χ est un caractère non-ramifié de L qu'on décompose en $(\chi_{i,j})$, où $\chi_{i,j}$ est un caractère non-ramifié de $\mathrm{GL}_{d_i}(F)$, alors

— pour tout $i \in [\![1,r]\!], j \in [\![1,\ell_i - 1]\!]$,

$$\begin{aligned} (\sigma \otimes \chi)^{s_{i,j}} &\simeq \sigma_1\chi_{1,1} \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_i\chi_{i,j+1} \boxtimes \sigma_i\chi_{i,j} \boxtimes \ldots \sigma_r\chi_{r,\ell_r} \boxtimes \tau \\ {}^{\widehat{s}_{i,j}}(\varphi_\sigma\widehat{\chi}) &= \pi_1\widehat{\chi}_{1,1} \oplus \ldots \oplus \pi_i\widehat{\chi}_{i,j+1} \oplus \pi_i\widehat{\chi}_{i,j} \oplus \ldots \oplus \pi_r\widehat{\chi}_{r,\ell_r} \oplus \varphi_\tau \\ &\quad \oplus \pi_r^\vee\widehat{\chi}_{r,\ell_r}^{-1} \oplus \ldots \oplus \pi_i^\vee\widehat{\chi}_{i,j} \oplus \pi_i^\vee\widehat{\chi}_{i,j+1}^{-1} \oplus \ldots \pi_1^\vee\widehat{\chi}_{1,1}^{-1} \end{aligned}$$

— pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

$$(\sigma \otimes \chi)^{s_{i,\ell_i}} \simeq \sigma_1\chi_{1,1} \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_i\chi_{i,\ell_i-1} \boxtimes \sigma_i^\vee \chi_{i,\ell_i}^{-1} \boxtimes \ldots \sigma_r\chi_{r,\ell_r} \boxtimes \tau$$
$$^{\widehat{s}_{i,\ell_i}}(\varphi_\sigma\widehat{\chi}) = \pi_1\widehat{\chi}_{1,1} \oplus \ldots \oplus \pi_i\widehat{\chi}_{i,\ell_i-1} \oplus \pi_i^\vee \widehat{\chi}_{i,\ell_i}^{-1} \oplus \ldots \oplus \pi_r\widehat{\chi}_{r,\ell_r} \oplus \varphi_\tau$$
$$\oplus \pi_r^\vee \widehat{\chi}_{r,\ell_r}^{-1} \oplus \ldots \oplus \pi_i\widehat{\chi}_{i,\ell_i} \oplus \pi_i^\vee \widehat{\chi}_{i,\ell_i-1}^{-1} \oplus \ldots \pi_1^\vee \widehat{\chi}_{1,1}^{-1}$$

Ceci montre que $W_\mathfrak{s} \simeq \mathcal{W}_\mathcal{j}$ et que les actions sur les tores correspondants sont compatibles. □

Théorème 5.7. *On reprend les notations précédentes. On a une bijection*

$$\mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s} \simeq \Phi(G)^+_\mathcal{j},$$

induisant des bijections

$$\mathbf{Irr}(G)_{\mathfrak{s},2} \simeq \Phi(G)^+_{\mathcal{j},2},$$

et

$$\mathbf{Irr}(G)_{\mathfrak{s},\mathrm{temp}} \simeq \Phi(G)^+_{\mathcal{j},\mathrm{bdd}}.$$

De plus, d'après la proposition 5.6 et le théorème 5.5, on obtient une bijection compatible avec les desiderata de la conjecture ABPS :

$$\mathbf{Irr}(G)_\mathfrak{s} \simeq T_\mathfrak{s} /\!\!/ \widehat{W}_\mathfrak{s}.$$

Remarque 5.8. Comme il a été rappelé dans l'introduction, la conjecture ABPS a déjà été prouvée pour les groupes classiques. En effet, un des résultats de [Sol12], est la preuve de la validité d'une version de la conjecture dans le cas d'une algèbre Hecke affine. Grâce aux travaux d'Heiermann [Hei11], le résultat s'en suit.

Théorème 5.9. *Le paramétrage des représentations irréductibles de G par les paramètres de Langlands dans la construction précédente montre que la conjecture 4.5 est vraie. Autrement dit, la correspondance de Langlands est compatible avec l'induction parabolique.*

Démonstration. C. Mœglin a montré que le réel $x \in \mathbf{R}^+$ tel que $\sigma_i|\cdot|^x \rtimes \tau$ est réductible, vaut

$$x = \begin{cases} \frac{a_{\sigma_i}+1}{2} & \text{si } \pi_i \in \mathrm{Jord}(\phi_\tau), \text{ avec } a_{\sigma_i} = \max\{a \in \mathbf{N}, (\sigma_i, a) \in \mathrm{Jord}(\varphi_\tau)\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \pi_i \notin \mathrm{Jord}(\phi_\tau) \text{ et } (\sigma_i \text{ et } \widehat{G}) \text{ sont de même type} \\ 0 & \text{si } \pi_i \notin \mathrm{Jord}(\phi_\tau) \text{ et } (\sigma_i \text{ et } \widehat{G}) \text{ sont de type différent} \end{cases}$$

Supposons $\pi_i \in \mathrm{Jord}(\phi_\tau)$. Dans ce cas, $m_\pi \neq 0$ et la partition paramétrant l'unipotent u_{π_i} est du type $(2d-1, \ldots, 3, 1)$ ou $(2d, \ldots, 4, 2)$, c'est-à-dire dans la décomposition de φ_τ, on a $S_{\pi_i} = \bigoplus_{k=1}^d S_{2k-1}$ ou $S_{\pi_i} = \bigoplus_{k=1}^d S_{2k}$. Le système de racines associé dans une telle situation est de type B et les paramètres calculés par Lusztig sont alors 2 pour les racines longues et $a+1$ pour la racine courte, où a désigne la plus grande part de la partition (voir la table section 3.4). Par ailleurs, $\mathfrak{t}^*$ est l'algèbre de Lie de $A_{\widehat{L}}$ (par discrétion du paramètre de Langlands φ de $\widehat{L}$). Le tore associé au réseau $\Lambda_\mathcal{O}$ défini par Heiermann est isomorphe à $\mathcal{T}_\mathcal{j}$.

On fixe un caractère non-ramifié unitaire $\zeta \in \mathfrak{X}(L)$ et on considère $\omega = W_\mathfrak{s} \cdot (\sigma\chi)$ un caractère infinitésimal dont la partie elliptique est dans l'orbite de $\sigma\zeta$. Par la correspondance de Langlands, on note $\widehat{\chi}$ le cocaractère non-ramifié de $\widehat{L}$ associé à χ, $\widehat{\omega} = \mathcal{W}_{\mathscr{j}} \cdot (\varphi_\sigma \widehat{\chi})$ le cocaractère infinitésimal correspondant et $\overline{\omega}$ le cocaractère infinitésimal « hyperbolique » comme défini en section 3.3 et 3.5. Remarquons au passage que le choix du point de base montre que la partie hyperbolique de $\varphi_{\sigma|W_F}\widehat{\chi}$ est la partie hyperbolique de $\widehat{\chi}$. Autrement dit, le paramètre $\varphi_\sigma\widehat{\chi}$ est tempérée, si et seulement si, $\widehat{\chi}$ est unitaire (et donc égal à $\widehat{\zeta}$ à conjugaison près).

On avait vu en fin de section 3.5 la bijection suivante

$$\mathbf{Irr}(G)_\omega \simeq \mathbf{Irr}\left(\mathbb{H}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O},\zeta},\mu_\zeta} \rtimes \mathbf{C}[R_{\mathfrak{s},\zeta}]\right)_{\overline{\omega}}.$$

Or, on a vu précédemment que $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ s'identifie au système de racines associé au groupe de Weyl $\mathcal{W}_{\mathscr{j}}^\circ$. De plus, la comparaison entre les fonctions paramètres μ_ζ et $\mu_{\widehat{\zeta}}$ données d'une part par les travaux de Lusztig et d'autre part par Heiermman grâce aux travaux de Bernstein-Zelevinsky et Arthur-Mœglin montre que ces fonctions sont égales. On obtient donc

$$\mathbf{Irr}(G)_\omega \simeq \mathbf{Irr}\left(\mathbb{H}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O},\zeta},\mu_\zeta} \rtimes \mathbf{C}[R_{\mathfrak{s},\zeta}]\right)_{\overline{\omega}} \simeq \mathbf{Irr}\left(\mathbb{H}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O},\widehat{\zeta}},\mu_{\widehat{\zeta}}} \rtimes \mathbf{C}[\mathcal{R}_{\mathscr{j},\widehat{\zeta}}]\right)_{\overline{\omega}}$$

Heiermann a montré dans [Hei12] que les représentations irréductibles de carré intégrable (resp. tempérée) correspondent aux modules irréductibles sur l'algèbre de Hecke affine étendue associé de carré intégrable (resp. tempéré).
Lusztig a montré dans [Lus02b] que les modules irréductibles de carré intégrable (resp. tempérée) sont en bijection avec certains triplets contenant une orbite unipotente distinguée (resp. de caractère infinitésimal elliptique). Ceci prouve le théorème 5.7. Le théorème 5.9 en est un corollaire. □

5.5 Exemples

Notons $G = \mathrm{Sp}_4(F)$ et $T = \mathrm{GL}_1(F)^2$ son tore maximal. Considérons $\zeta : F^\times \longrightarrow \mathbf{C}^\times$ un caractère quadratique ramifié, $\sigma = \zeta \boxtimes \zeta$ une représentation irréductible supercuspidale de T et la paire inertielle $\mathfrak{s} = [T, \zeta \boxtimes \zeta]$.
D'après la correspondance de Langlands pour les tores, le paramètre de Langlands de σ est de la forme $\varphi_\sigma : W_F \longrightarrow \widehat{T}$, où l'on voit $\widehat{T} = \mathrm{GL}_1(\mathbf{C})^2$ comme tore maximal de $\widehat{G} = \mathrm{SO}_5(\mathbf{C})$. Le paquet $\Pi_{\varphi_\sigma}(T)$ ne contient qu'une seule représentation, σ. Soit $\mathscr{j} = [\widehat{T}, \varphi_\sigma, \mathrm{triv}]$ le support inertiel complet correspondant. On rappelle que

$$N_{\widehat{G}}(\widehat{T})/\widehat{T} = \langle \widehat{s}_1, \widehat{s}_2 \rangle,$$

où $\widehat{s}_1(t_1,t_2) = (t_2,t_1)$ et $\widehat{s}_2(t_1,t_2) = (t_1,t_2^{-1})$. C'est un groupe de Weyl de type B_2.
Le stabilisateur $\mathfrak{X}(\widehat{T})(\varphi_\sigma)$ est trivial et en reprenant les notations de la section précédente $\mathcal{W}_{\mathscr{j}} = \mathcal{W}_{\mathscr{j}}^\circ \rtimes \mathcal{R}_{\mathscr{j}}$, avec

$$\mathcal{W}_{\mathscr{j}}^\circ = \langle \widehat{s}_1 \rangle \times \langle \widehat{s}_2\widehat{s}_1\widehat{s}_2 \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{\mathscr{j}} = \langle \widehat{s}_2 \rangle.$$

On voit donc que $\mathcal{W}_{\mathscr{j}} \simeq N_{\widehat{G}}(\widehat{T})/\widehat{T}$, pourtant on voit $\mathcal{W}_{\mathscr{j}}$ comme un groupe de Weyl de type D_2 étendue.
Les cinq classes de conjugaisons de $\mathcal{W}_{\mathscr{j}}$ sont : $\{1\}, \{\widehat{s}_1, \widehat{s}_2\widehat{s}_1\widehat{s}_2\}, \{\widehat{s}_2, \widehat{s}_1\widehat{s}_2\widehat{s}_1\}, \{\widehat{s}_1\widehat{s}_2, \widehat{s}_2\widehat{s}_1\}, \{\widehat{s}_1\widehat{s}_2\widehat{s}_1\widehat{s}_2\}$.
Identifions le paramètre de Langlands $\chi_1\zeta \oplus \chi_2\zeta \oplus 1 \oplus \chi_2^{-1}\zeta \oplus \chi_1^{-1}\zeta \in \mathcal{T}_{\mathscr{j}}$ à l'élément (χ_1, χ_2). On a alors

— $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^{\widehat{s}_1} = \{(\chi, \chi),\ \chi \in \mathfrak{X}(\widehat{T})\}$;
— $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^{\widehat{s}_2} = \{(\chi, \xi), \chi,\ \xi \in \mathfrak{X}(\widehat{T}), \xi^2 = 1\}$;
— $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^{\widehat{s}_1\widehat{s}_2} = \{(1,1), (\xi, \xi),\ \xi$ caractère non-ramifié d'ordre $2\}$;
— $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^{\widehat{s}_1\widehat{s}_2\widehat{s}_1\widehat{s}_2} = \{(1,1), (\xi, \xi), (1, \xi), (\xi, 1),\ \xi$ caractère non-ramifié d'ordre $2\}$;

Il y a essentiellement cinq types de paramètres de Langlands à considérer (bien entendu, on supposera ne pas être dans un cas précédent) :

(1) $\phi|_{W_F} = \xi\zeta \oplus \xi\zeta \oplus 1 \oplus \xi\zeta \oplus \xi\zeta$, avec ξ un caractère non-ramifié d'ordre au plus 2 ;
(2) $\phi|_{W_F} = \zeta \oplus \xi\zeta \oplus 1 \oplus \xi\zeta \oplus \xi\zeta$, avec ξ un caractère non-ramifié d'ordre 2 ;
(3) $\phi|_{W_F} = \chi\zeta \oplus \xi\zeta \oplus 1 \oplus \xi\zeta \oplus \chi^{-1}\zeta$, avec ξ un caractère non-ramifié d'ordre au plus 2 et χ un caractère non-ramifié ;
(4) $\phi|_{W_F} = \chi\zeta \oplus \chi\zeta \oplus 1 \oplus \chi^{-1}\zeta \oplus \chi^{-1}\zeta$, avec χ un caractère non-ramifié ;
(5) $\phi|_{W_F} = \chi_1\zeta \oplus \chi_2\zeta \oplus 1 \oplus \chi_2^{-1}\zeta \oplus \chi_1^{-1}\zeta$, avec χ_1, χ_2 des caractères non-ramifiés ;

Dans ce qui précède, on suppose que les cas sont disjoints. Par exemple, dans (3) on suppose que χ n'est pas trivial ou d'ordre 2 pour ne pas être dans le cas (2).

	$Z_{\widehat{G}_*}(\phi\|_{W_F})$	$Z_{\widehat{G}}(\phi\|_{W_F})$	$Z_{\widehat{G}}(\phi\|_{W_F})^\circ$	$\mathcal{W}_{\mathcal{J},\phi}$
(1)	$\mathrm{O}_4 \times \mathrm{O}_1$	$(\mathrm{O}_4 \times \mathrm{O}_1)^+$	SO_4	$(\langle\widehat{s}_1\rangle \times \langle\widehat{s}_2\widehat{s}_1\widehat{s}_2\rangle) \rtimes \langle\widehat{s}_2\rangle$
(2)	$\mathrm{O}_2 \times \mathrm{O}_2 \times \mathrm{O}_1$	$(\mathrm{O}_2 \times \mathrm{O}_2 \times \mathrm{O}_1)^+$	$\mathrm{SO}_2 \times \mathrm{SO}_2$	$\langle\widehat{s}_1\widehat{s}_2\widehat{s}_1\rangle \times \langle\widehat{s}_2\rangle$
(3)	$\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{O}_2 \times \mathrm{O}_1$	$\mathrm{GL}_1 \times (\mathrm{O}_2 \times \mathrm{O}_1)^+$	$\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{SO}_2$	$\langle\widehat{s}_2\rangle$
(4)	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{O}_1$	GL_2	GL_2	$\langle\widehat{s}_1\rangle$
(5)	$\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_1$	$\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_1$	$\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_1$	$\{1\}$

Dans le cas (1), les orbites unipotentes dans $Z_{\widehat{G}}(\phi|_{W_F})^\circ$ sont paramétrées par $(3,1), (2^2)$ et (1^4). Ceci correspond aux paramètres de Langlands de G de la forme
— $\xi\zeta \boxtimes (S_3 \oplus S_1) \oplus 1$, $A_{\widehat{G}}(\phi) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$;
— $\xi\zeta \boxtimes S_2 \oplus 1 \oplus \xi\zeta \boxtimes S_2$, $A_{\widehat{G}}(\phi) = \{1\}$;
— $\xi\zeta \oplus \xi\zeta \oplus 1 \oplus \xi\zeta \oplus \xi\zeta$, $A_{\widehat{G}}(\phi) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Dans le cas (2), les orbites unipotentes dans $Z_{\widehat{G}}(\phi|_{W_F})^\circ$ sont paramétrées par (1^4). Ceci correspond au paramètre de Langlands de G de la forme
— $\zeta \oplus \xi\zeta \oplus 1 \oplus \xi\zeta \oplus \zeta$, $A_{\widehat{G}}(\phi) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

Dans le cas (3), les orbites unipotentes dans $Z_{\widehat{G}}(\phi|_{W_F})^\circ$ sont paramétrées par (1^4). Ceci correspond au paramètre de Langlands de G de la forme
— $\chi\zeta \oplus \xi\zeta \oplus 1 \oplus \xi\zeta \oplus \chi^{-1}\zeta$, $A_{\widehat{G}}(\phi) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Dans le cas (4), les orbites unipotentes dans $Z_{\widehat{G}}(\phi|_{W_F})^\circ$ sont paramétrées par (2^4) et (1^4). Ceci correspond aux paramètres de Langlands de G de la forme

— $\chi\zeta \boxtimes S_2 \oplus 1 \oplus \chi^{-1}\zeta \boxtimes S_2$, $A_{\widehat{G}}(\phi) = \{1\}$;

— $\chi\zeta \oplus \chi\zeta \oplus 1 \oplus \chi^{-1}\zeta \oplus \chi^{-1}\zeta$, $A_{\widehat{G}}(\phi) = \{1\}$.

Dans le cas (5), les orbites unipotentes dans $Z_{\widehat{G}}(\phi|_{W_F})^\circ$ sont paramétrées par (1^4) . Ceci correspond au paramètre de Langlands de G de la forme

— $\chi_1\zeta \oplus \chi_2\zeta \oplus 1 \oplus \chi_2^{-1}\zeta \oplus \chi_1^{-1}\zeta$, $A_{\widehat{G}}(\phi) = \{1\}$.

À présent, on voit que les sous-groupes de Levi « cuspidaux » de H_ϕ^G dans les cas (2),(3),(4),(5) sont le tore maximal correspondant. Ainsi, pour tous les paramètres complets décrit dans ces cas sont associés à $\mathcal{j}$. Dans le cas (1), il y a deux sous-groupes de Levi cuspidaux de H_ϕ^G : GL_1^2 et $(\mathrm{O}_4 \times \mathrm{O}_1)^+$ lui-même. Pour le paramètre $\phi = \xi\zeta \boxtimes (S_3 \oplus S_1) \oplus 1$, l'unipotent est paramétré par $(3,1)$, qui est l'orbite de SO_4 qui supporte un système local cuspidal. Ainsi, $A_{\mathrm{O}_4}(u_{3,1}) = \langle z_1 \rangle \times \langle z_3 \rangle$, $A_{\mathrm{SO}_4}(u_{3,1}) = \langle z_1 z_3 \rangle$ et $A_{\widehat{G}}(\phi) = \langle z_1 z_3 \rangle \times \langle z_1' z_1 \rangle$, où $z_1' = -1 \in \mathrm{O}_1$. Il y a donc deux types de représentations irréductibles de $A_{\widehat{G}}(\phi)$, les caractères η_1, η_2 tels que $\eta_i(z_1 z_3) = 1$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que $\varepsilon_i(z_1 z_3) = -1$. Les paramètres de Langlands complets (ϕ, η_i) sont associés au triplet inertiel $\mathcal{j}$, tandis que les paramètres de Langlands complets (ϕ, ε_i) définissent deux représentations supercuspidales.

Revenons à la correspondance de Springer.
Dans le cas (1), considérons la table suivante qui décrit la correspondance de Springer, à gauche les éléments du cône unipotent complet et à droite les représentations irréductibles de $\mathcal{W}_{\mathcal{j}}^\circ$.

$\mathcal{N}_{\mathrm{SO}_4}^+$	$\mathbf{Irr}(\mathcal{W}_{\mathcal{j},\phi}^\circ)$
$(u_{1^4}, 1)$	$1 \boxtimes 1$
$(u_{2^2}^I, 1)$	$1 \boxtimes \varepsilon$
$(u_{2^2}^{II}, 1)$	$\varepsilon \boxtimes 1$
$(u_{3,1}, 1)$	$\varepsilon \boxtimes \varepsilon$

Notons à présent $\rho_{1^4} = 1\boxtimes 1\boxtimes 1$, $\rho'_{1^4} = 1\boxtimes 1\boxtimes\varepsilon$, $\rho_{2^2} = \mathrm{Ind}_{\mathcal{W}_{\mathcal{j}}^\circ}^{\mathcal{W}_{\mathcal{j}}}(1\boxtimes\varepsilon) = \mathrm{Ind}_{\mathcal{W}_{\mathcal{j}}^\circ}^{\mathcal{W}_{\mathcal{j}}}(\varepsilon\boxtimes 1)$, $\rho_{3,1} = \varepsilon \boxtimes \varepsilon \boxtimes 1$, $\rho'_{3,1} = \varepsilon \boxtimes \varepsilon \boxtimes \varepsilon$. La correspondance de Springer pour $(\mathrm{O}_4 \times \mathrm{O}_1)^+$ est alors

$\mathcal{N}_{H_\phi^G}^+$	$\mathbf{Irr}(\mathcal{W}_{\mathcal{j},\phi})$
$(u_{1^4}, 1)$	ρ_{1^4}
(u_{1^4}, ε)	ρ'_{1^4}
$(u_{2^2}, 1)$	ρ_{2^2}
$(u_{3,1}, \eta_1)$	$\rho_{3,1}$
$(u_{3,1}, \eta_2)$	$\rho'_{3,1}$

Dans le cas (2), il n'y a que l'élément unipotent trivial qui intervient et on a

$\mathcal{N}^+_{H^G_\phi}$	$\mathbf{Irr}(\mathcal{W}_{\mathcal{J},\phi})$
$(u_{1^4}, 1 \boxtimes 1)$	$1 \boxtimes 1$
$(u_{1^4}, 1 \boxtimes \varepsilon)$	$1 \boxtimes \mathrm{sgn}$
$(u_{1^4}, \varepsilon \boxtimes 1)$	$\varepsilon \boxtimes 1$
$(u_{1^4}, \varepsilon \boxtimes \varepsilon)$	$\varepsilon \boxtimes \varepsilon$

Dans le cas (3), on a

$\mathcal{N}^+_{H^G_\phi}$	$\mathbf{Irr}(\mathcal{W}_{\mathcal{J},\phi})$
$(u_{1^4}, 1)$	triv
(u_{1^4}, ε)	ε

Dans le cas (4), on a

$\mathcal{N}^+_{H^G_\phi}$	$\mathbf{Irr}(\mathcal{W}_{\mathcal{J},\phi})$
$(u_{1^4}, 1)$	triv
$(u_{2^2}, 1)$	ε

Dans le cas (5), on a

$\mathcal{N}^+_{H^G_\phi}$	$\mathbf{Irr}(\mathcal{W}_{\mathcal{J},\phi})$
$(u_{1^4}, 1)$	triv

Dans le tableau suivant on résume la bijection obtenue via la conjecture ABPS. On reprend les notations de [ST93, §5], $L(\pi)$ signifie le quotient de Langlands de π, lorsque ω est un caractère d'ordre 2, $\delta(\omega)'$ et $\delta(\omega)''$ sont les deux sous-représentations de carré intégrale de $\nu\omega \times \omega \rtimes 1$, T_1^ω et T_2^ω sont les représentations tempérées dans la décomposition de $\omega \rtimes 1$ et enfin $Q_i(\omega \rtimes T_j^{\omega'})$ désigne les constituants de l'induite $\omega \rtimes T_j^{\omega'}$, avec ω' un caractère d'ordre 2 différent de ω. De plus, il est clair que le cocaractère correcteur est la restriction au maximal de SL_2.

paramètre de Langlands	point de $\mathcal{T}_{\mathfrak{j}} /\!\!/ \widehat{\mathcal{W}}_{\mathfrak{j}}$	constituant	représentation
$\nu\xi\zeta \oplus \xi\zeta \oplus 1 \oplus \xi\zeta \oplus \nu^{-1}\xi\zeta$	$(\nu\xi\zeta \oplus \xi\zeta, \rho_{1^4})$	$L(\nu\xi\zeta, T_1^{\xi\zeta})$	$\nu\xi\zeta \times \xi\zeta \rtimes 1$
	$(\nu\xi\zeta \oplus \xi\zeta, \rho'_{1^4})$	$L(\nu\xi\zeta, T_2^{\xi\zeta})$	
$\nu^{1/2}\xi\zeta \boxtimes S_2 \oplus 1 \oplus \nu^{-1/2}\xi\zeta \boxtimes S_2$	$(\nu^{1/2}\xi\zeta \oplus \nu^{1/2}\xi\zeta, \rho_{2^2})$	$L(\nu^{1/2}\xi\zeta St_{GL_2}, 1)$	
$\xi\zeta \boxtimes (S_3 \oplus S_1) \oplus 1$	$(\xi\zeta \oplus \xi\zeta, \rho_{3,1})$	$\delta'(\xi\zeta)$	
	$(\xi\zeta \oplus \xi\zeta, \rho'_{3,1})$	$\delta''(\xi\zeta)$	
$\chi\zeta \oplus \xi\zeta \oplus 1\xi\zeta \oplus \chi^{-1}\zeta$	$(\chi\zeta \oplus \xi\zeta, 1)$	$\chi\zeta \rtimes T_1^{\xi\zeta}$	$\chi\zeta \times \xi\zeta \rtimes 1$
	$(\chi\zeta \oplus \xi\zeta, \varepsilon)$	$\chi\zeta \rtimes T_2^{\xi\zeta}$	
$\zeta \oplus \xi\zeta \oplus 1 \oplus \xi\zeta \oplus \zeta$	$(\zeta \oplus \xi\zeta, 1 \boxtimes 1)$	$Q_1(\zeta \rtimes T_1^{\xi\zeta})$	$\zeta \times \xi\zeta \rtimes 1$
	$(\zeta \oplus \xi\zeta, \varepsilon \boxtimes 1)$	$Q_2(\zeta \rtimes T_1^{\xi\zeta})$	
	$(\zeta \oplus \xi\zeta, 1 \boxtimes \varepsilon)$	$Q_1(\zeta \rtimes T_2^{\xi\zeta})$	
	$(\zeta \oplus \xi\zeta, \varepsilon \boxtimes \varepsilon)$	$Q_2(\zeta \rtimes T_2^{\xi\zeta})$	
$\nu^{1/2}\chi\zeta \oplus \nu^{-1/2}\chi\zeta \oplus 1 \oplus \nu^{1/2}\chi^{-1}\zeta \oplus \nu^{-1/2}\chi^{-1}\zeta$	$(\nu^{1/2}\chi\zeta \oplus \nu^{-1/2}\chi\zeta, 1)$	$\chi\zeta 1_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1$	$\nu^{1/2}\chi\zeta \times \nu^{-1/2}\chi\zeta \rtimes 1$
$\chi\zeta \boxtimes S_2 \oplus 1 \oplus \chi^{-1}\zeta \boxtimes S_2$	$(\chi\zeta \oplus \chi\zeta, \varepsilon)$	$\chi\zeta St_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1$	

Pour les représentations supercuspidales $\pi'_{\xi\zeta}$ et $\pi''_{\xi\zeta}$ dans le paquet défini par le paramètre de Langlands $\xi\zeta \boxtimes (S_3 \oplus S_1) \oplus 1$, les supports inertiels qu'elles définissent, le tore associé et le groupe de Weyl étendu correspondent bien aux notions qu'on a défini en terme de paramètres de Langlands complets puisque le groupe de Weyl étendu est trivial. On se propose de voir ce qu'il se passe dans un groupe faisant intervenir $\mathrm{Sp}_4(F)$ dans un facteur de Levi propre.

On considère à présent $G = \mathrm{Sp}_6(F)$, $L = \mathrm{GL}_1(F) \times \mathrm{Sp}_4(F)$. On fixe ζ comme précédemment, on note $\phi = (\zeta \boxtimes (S_3 \oplus S_1) \oplus 1$ et soit π l'une des représentations supercuspidales de $\mathrm{Sp}_4(F)$ de paramètre de Langlands complet (φ, ε) (avec ε l'une des représentations cuspidales qu'on a vu précédemment). Soit $\mathfrak{s} = [L, \zeta \boxtimes \pi]$ et $[\widehat{L}, \varphi, \varepsilon]$ le triplet inertiel complet correspondant. Le tore $\mathcal{T}_{\mathfrak{j}}$ est de dimension 1 et $\mathcal{W}_{\mathfrak{j}} = \mathcal{W}_{\mathfrak{j}}^{\circ} = \langle \widehat{s} \rangle$, où $\widehat{s}z = z^{-1}$. Il y a donc deux types de paramètres de Langlands à considérer

(1) $\phi|_{W_F} = \zeta \oplus \zeta \oplus \zeta \oplus 1 \oplus \zeta \oplus \zeta \oplus \zeta$;
(2) $\phi|_{W_F} = \chi\zeta \oplus \zeta \oplus \zeta \oplus 1 \oplus \zeta \oplus \zeta \oplus \chi^{-1}\zeta$, avec χ un caractère non-ramifié ;

	$Z_{\widehat{G}_*}(\phi\|_{W_F})$	$Z_{\widehat{G}}(\phi\|_{W_F})$	$Z_{\widehat{G}}(\phi\|_{W_F})^{\circ}$	$\mathcal{W}_{\mathfrak{j},\phi}$
(1)	$\mathrm{O}_6 \times \mathrm{O}_1$	$(\mathrm{O}_6 \times \mathrm{O}_1)^+$	SO_6	$\langle \widehat{s} \rangle$
(3)	$\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{O}_4 \times \mathrm{O}_1$	$\mathrm{GL}_1 \times (\mathrm{O}_4 \times \mathrm{O}_1)^+$	$\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{SO}_4$	$\{1\}$

On doit donc appliquer la correspondance de Springer généralisée dans SO_6 et déterminer quelle classe unipotente et quelle représentation irréductible du groupe des composantes correspond à la représentation signature pour la paire cuspidale $(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{SO}_4, u_1 \times u_{3,1}, \varepsilon_0)$. Il n'y a pas vraiment le choix car on sait d'après le théorème de Lusztig (renormalisé) que c'est l'induite de Luszitg-Spalteinstein de $u_1 \times u_{3,1}$. Or cette classe unipotente admet pour partition $(5, 1)$ (voir par exemple [Lus88, 2.13]).

Dans le cas (1), les orbites unipotentes « pertinentes » dans $Z_{\widehat{G}}(\varphi_{|W_F})^\circ$ sont paramétrées par $(5,1)$ et $(3,1^3)$. Ceci correspond aux paramètres de Langlands de G de la forme

— $\zeta \boxtimes (S_5 \oplus S_1) \oplus 1$, $A_{\widehat{G}}(\phi) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$;

— $\chi\zeta \oplus \zeta \boxtimes (S_3 \oplus S_1) \oplus \chi^{-1}\zeta$, $A_{\widehat{G}}(\phi) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

Dans le cas (2), la seule orbite unipotentes« pertinente » est $(3,1^3)$ et on a le même résultat que précédemment

— $\chi\zeta \oplus \zeta \boxtimes (S_3 \oplus S_1) \oplus \chi^{-1}\zeta$, $A_{\widehat{G}}(\phi) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

Dans le paquet défini par $\zeta \boxtimes (S_5 \oplus S_1) \oplus 1$ il y a quatres représentations, notons $\theta', \theta'', \delta_1, \delta_2$. Comme on le sait, θ' et θ'' sont deux représentations de carré intégrable de la série principale, δ_1 est une représentation de carré intégrable obtenue comme sous-quotient de $\nu^2\zeta \rtimes \pi$ tandis que δ_2 est une représentation de carré intégrable obtenue comme sous-quotient de $\nu^2\zeta \rtimes \pi'$, où π' est l'autre représentation supercuspidale dans le L-paquet de π.

paramètre de Langlands	point de $\mathcal{T}_{\mathfrak{j}} /\!/ \widehat{\mathcal{W}}_{\mathfrak{j}}$	constituant	représentation
$\nu^2\zeta \oplus \zeta \boxtimes (S_3 \oplus 1) \oplus 1 \oplus \nu^{-2}\zeta$	$(\zeta \oplus \zeta \oplus \zeta \oplus 1, \mathrm{triv})$	$Q(\nu^2\zeta \rtimes \pi)$	$\nu^2\zeta \rtimes \pi$
$\zeta \boxtimes (S_5 \oplus S_1) \oplus 1$	$(\zeta \oplus \zeta \oplus \zeta \oplus 1, \mathrm{sgn})$	δ	
$\chi\zeta \oplus \zeta \boxtimes (S_3 \oplus 1) \oplus 1 \oplus \chi^{-1}\zeta$	$(\chi\zeta \oplus \zeta \oplus \zeta \oplus 1, \mathrm{triv})$	$\chi\zeta \rtimes \pi$	$\chi\zeta \rtimes \pi$

Concernant le cocaractère correcteur associé au point $(\zeta \oplus \zeta \oplus \zeta \oplus 1, \mathrm{sgn})$, si on prend uniquement la restriction au tore maximal de SL_2 du paramètre de Langlands associé on obtient : $h(z) = (z^4, z^2, 1, z^{-2}, z^{-4})$. En revanche, si on prend le quotient de ce cocaractère par celui donné par le paramètre de π, qui est $h_\pi(z) = (1, z^2, 1, z^{-2}, 1)$, on obtient $c(z) = (z^4, 1, 1, 1, z^{-4})$.

Bibliographie

[ABP07] Anne-Marie Aubert, Paul Baum et Roger Plymen. “Geometric structure in the representation theory of p-adic groups”. In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 345.10 (2007), p. 573–578. ISSN : 1631-073X. DOI : `10.1016/j.crma.2007.10.011`. URL : `http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2007.10.011`.

[Art13] James Arthur. *The endoscopic classification of representations*. T. 61. American Mathematical Society Colloquium Publications. Orthogonal and symplectic groups. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, p. xviii+590. ISBN : 978-0-8218-4990-3.

[Aub+14a] Anne-Marie Aubert, Paul Baum, Roger Plymen et Maarten Solleveld. “Geometric structure for Bernstein blocks”. In : (août 2014). eprint : `1408.0673`. URL : `http://arxiv.org/abs/1408.0673`.

[Aub+14b] Anne-Marie Aubert, Paul Baum, Roger Plymen et Maarten Solleveld. “The principal series of p-adic groups with disconnected centre”. In : (sept. 2014). eprint : `1409.8110`. URL : `http://arxiv.org/abs/1409.8110`.

[BC13] Dan Barbasch et Dan Ciubotaru. “Unitary equivalences for reductive p-adic groups”. In : *Amer. J. Math.* 135.6 (2013), p. 1633–1674. ISSN : 0002-9327. DOI : `10.1353/ajm.2013.0048`. URL : `http://dx.doi.org/10.1353/ajm.2013.0048`.

[BC88] Paul Baum et Alain Connes. “Chern character for discrete groups”. In : *A fête of topology*. Academic Press, Boston, MA, 1988, p. 163–232.

[BEG03] Vladimir Baranovsky, Sam Evens et Victor Ginzburg. “Representations of quantum tori and G-bundles on elliptic curves”. In : *The orbit method in geometry and physics (Marseille, 2000)*. T. 213. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003, p. 29–48.

[Ber84] J. N. Bernstein. “Le “centre” de Bernstein”. In : *Representations of reductive groups over a local field*. Travaux en Cours. Edited by P. Deligne. Hermann, Paris, 1984, p. 1–32.

[BH06] Colin J. Bushnell et Guy Henniart. *The local Langlands conjecture for* GL(2). T. 335. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 2006, p. xii+347. ISBN : 978-3-540-31486-8 ; 3-540-31486-5. DOI : `10.1007/3-540-31511-X`. URL : `http://dx.doi.org/10.1007/3-540-31511-X`.

[Bor79] Armand Borel. “Automorphic L-functions”. In : *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*. Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 27–61.

[CG10] Neil CHRISS et Victor GINZBURG. *Representation theory and complex geometry.* Modern Birkhäuser Classics. Reprint of the 1997 edition. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010, p. x+495. ISBN : 978-0-8176-4937-1. DOI : 10.1007/978-0-8176-4938-8. URL : http://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-4938-8.

[Ciu08] Dan CIUBOTARU. "On unitary unipotent representations of p-adic groups and affine Hecke algebras with unequal parameters". In : *Represent. Theory* 12 (2008), p. 453–498. ISSN : 1088-4165. DOI : 10.1090/S1088-4165-08-00338-5. URL : http://dx.doi.org/10.1090/S1088-4165-08-00338-5.

[CM93] David H. COLLINGWOOD et William M. MCGOVERN. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras.* Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993, p. xiv+186. ISBN : 0-534-18834-6.

[Del73] Pierre DELIGNE. "Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L". In : *Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972).* Springer, Berlin, 1973, 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349.

[Gan+12] W. T. GAN, B. H. GROSS, D. PRASAD et J.-L. WALDSPURGER. *Sur les conjectures de Gross et Prasad. I.* Astérisque No. 346 (2012). Société Mathématique de France, Paris, 2012, p. xi+318.

[Gan13] Radhika GANAPATHY. *The local Langlands correspondence for* GSp_4 *over local function fields.* Mai 2013. arXiv : 1305.6088 [math-rt]. URL : http://arxiv.org/abs/1305.6088.

[GM83] Mark GORESKY et Robert MACPHERSON. "Intersection homology. II". In : *Invent. Math.* 72.1 (1983), p. 77–129. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/BF01389130. URL : http://dx.doi.org/10.1007/BF01389130.

[Gol11] David GOLDBERG. "On dual R-groups for classical groups". In : *On certain L-functions.* T. 13. Clay Math. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, p. 159–185.

[GR10] Benedict H. GROSS et Mark REEDER. "Arithmetic invariants of discrete Langlands parameters". In : *Duke Math. J.* 154.3 (2010), p. 431–508. ISSN : 0012-7094. DOI : 10.1215/00127094-2010-043. URL : http://dx.doi.org/10.1215/00127094-2010-043.

[GT10] Wee Teck GAN et Shuichiro TAKEDA. "The local Langlands conjecture for Sp(4)". In : *Int. Math. Res. Not. IMRN* 15 (2010), p. 2987–3038. ISSN : 1073-7928. DOI : 10.1093/imrn/rnp203. URL : http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnp203.

[GT11] Wee Teck GAN et Shuichiro TAKEDA. "The local Langlands conjecture for GSp(4)". In : *Ann. of Math. (2)* 173.3 (2011), p. 1841–1882. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.4007/annals.2011.173.3.12. URL : http://dx.doi.org/10.4007/annals.2011.173.3.12.

[Hai14] Thomas J. HAINES. "The stable Bernstein center and test functions for Shimura varieties". In : *Automorphic Forms and Galois Representations.* Sous la dir. de Fred DIAMOND, Payman L KASSAEI et Minhyong KIM. T. 2. Cambridge University Press, 2014.

[Hei06] Volker HEIERMANN. “Orbites unipotentes et pôles d’ordre maximal de la fonction μ de Harish-Chandra”. In : *Canad. J. Math.* 58.6 (2006), p. 1203–1228. ISSN : 0008-414X. DOI : 10.4153/CJM-2006-043-8. URL : http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2006-043-8.

[Hei10] Volker HEIERMANN. “Paramètres de Langlands et algèbres d’entrelacement”. In : *Int. Math. Res. Not. IMRN* 9 (2010), p. 1607–1623. ISSN : 1073-7928. DOI : 10.1093/imrn/rnp191. URL : http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnp191.

[Hei11] Volker HEIERMANN. “Opérateurs d’entrelacement et algèbres de Hecke avec paramètres d’un groupe réductif p-adique : le cas des groupes classiques”. In : *Selecta Math. (N.S.)* 17.3 (2011), p. 713–756. ISSN : 1022-1824. DOI : 10.1007/s00029-011-0056-0. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s00029-011-0056-0.

[Hei12] Volker HEIERMANN. “Algèbres de Hecke avec paramètres et représentations d’un groupe p-adique classique : préservation du spectre tempéré”. In : *J. Algebra* 371 (2012), p. 596–608. ISSN : 0021-8693. DOI : 10.1016/j.jalgebra.2012.09.003. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.09.003.

[Hen00] Guy HENNIART. “Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique”. In : *Invent. Math.* 139.2 (2000), p. 439–455. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/s002220050012. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s002220050012.

[HT01] Michael HARRIS et Richard TAYLOR. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties.* T. 151. Annals of Mathematics Studies. With an appendix by Vladimir G. Berkovich. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, p. viii+276. ISBN : 0-691-09090-4.

[JN04] Jens Carsten JANTZEN et Karl-Hermann NEEB. *Lie theory.* T. 228. Progress in Mathematics. Lie algebras and representations, Edited by Jean-Philippe Anker and Bent Orsted. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004, p. xii+328. ISBN : 0-8176-3373-1. DOI : 10.1007/978-0-8176-8192-0. URL : http://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-8192-0.

[Kal+14] Tasho KALETHA, Alberto MINGUEZ, Sug Woo SHIN et Paul-James WHITE. “Endoscopic Classification of Representations : Inner Forms of Unitary Groups”. In : (sept. 2014). eprint : 1409.3731. URL : http://arxiv.org/abs/1409.3731.

[Kal12] Tasho KALETHA. “Epipelagic L-packets and rectifying characters”. In : (sept. 2012). eprint : 1209.1720. URL : http://arxiv.org/abs/1209.1720.

[Kot84] Robert E. KOTTWITZ. “Stable trace formula : cuspidal tempered terms”. In : *Duke Math. J.* 51.3 (1984), p. 611–650. ISSN : 0012-7094. DOI : 10.1215/S0012-7094-84-05129-9. URL : http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-84-05129-9.

[Kot97] Robert E. KOTTWITZ. “Isocrystals with additional structure. II”. In : *Compositio Math.* 109.3 (1997), p. 255–339. ISSN : 0010-437X. DOI : 10.1023/A:1000102604688. URL : http://dx.doi.org/10.1023/A:1000102604688.

[Lan97] R. P. Langlands. “Representations of abelian algebraic groups”. In : *Pacific J. Math.* Special Issue (1997). Olga Taussky-Todd : in memoriam, p. 231–250. ISSN : 0030-8730. DOI : 10.2140/pjm.1997.181.231. URL : http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1997.181.231.

[LRS93] Gérard Laumon, Michael Rapoport et Ulrich Stuhler. “$\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence”. In : *Invent. Math.* 113.2 (1993), p. 217–338. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/BF01244308. URL : http://dx.doi.org/10.1007/BF01244308.

[Lus02a] George Lusztig. “Classification of unipotent representations of simple p-adic groups. II”. In : *Represent. Theory* 6 (2002), p. 243–289. ISSN : 1088-4165. DOI : 10.1090/S1088-4165-02-00173-5. URL : http://dx.doi.org/10.1090/S1088-4165-02-00173-5.

[Lus02b] George Lusztig. “Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. III”. In : *Represent. Theory* 6 (2002), p. 202–242. ISSN : 1088-4165. DOI : 10.1090/S1088-4165-02-00172-3. URL : http://dx.doi.org/10.1090/S1088-4165-02-00172-3.

[Lus14] George Lusztig. “Families and Springer’s correspondence”. In : *Pacific J. Math.* 267.2 (2014), p. 431–450. ISSN : 0030-8730. DOI : 10.2140/pjm.2014.267.431. URL : http://dx.doi.org/10.2140/pjm.2014.267.431.

[Lus83] George Lusztig. “Some examples of square integrable representations of semisimple p-adic groups”. In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 277.2 (1983), p. 623–653. ISSN : 0002-9947. DOI : 10.2307/1999228. URL : http://dx.doi.org/10.2307/1999228.

[Lus84] George Lusztig. “Intersection cohomology complexes on a reductive group”. In : *Invent. Math.* 75.2 (1984), p. 205–272. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/BF01388564. URL : http://dx.doi.org/10.1007/BF01388564.

[Lus88] George Lusztig. “Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. I”. In : *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 67 (1988), p. 145–202. ISSN : 0073-8301. URL : http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1988__67__145_0.

[Lus89] George Lusztig. “Affine Hecke algebras and their graded version”. In : *J. Amer. Math. Soc.* 2.3 (1989), p. 599–635. ISSN : 0894-0347. DOI : 10.2307/1990945. URL : http://dx.doi.org/10.2307/1990945.

[Lus95a] George Lusztig. “Classification of unipotent representations of simple p-adic groups”. In : *Internat. Math. Res. Notices* 11 (1995), p. 517–589. ISSN : 1073-7928. DOI : 10.1155/S1073792895000353. URL : http://dx.doi.org/10.1155/S1073792895000353.

[Lus95b] George Lusztig. “Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. II”. In : *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*. T. 16. CMS Conf. Proc. With errata for Part I [Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 67 (1988), 145–202 ; MR0972345 (90e :22029)]. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1995, p. 217–275.

[Mœg11] Colette Mœglin. “Multiplicité 1 dans les paquets d’Arthur aux places p-adiques”. In : *On certain L-functions*. T. 13. Clay Math. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, p. 333–374.

[Mok15] Chung Pang MOK. “Endoscopic Classification of representations of Quasi-Split Unitary Groups”. In : *Memoirs of the American Mathematical Society* 235.1108 (2015).

[Ree12] Mark REEDER. “An introduction to the local Langlands correspondence”. 2012.

[Ren10] David RENARD. *Représentations des groupes réductifs p-adiques*. T. 17. Cours Spécialisés [Specialized Courses]. Paris : Société Mathématique de France, 2010, p. vi+332. ISBN : 978-2-85629-278-5.

[RS07] Brooks ROBERTS et Ralf SCHMIDT. *Local newforms for GSp(4)*. T. 1918. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 2007, p. viii+307. ISBN : 978-3-540-73323-2. DOI : 10.1007/978-3-540-73324-9. URL : http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-73324-9.

[Sch13] Peter SCHOLZE. “The local Langlands correspondence for GL_n over p-adic fields”. In : *Invent. Math.* 192.3 (2013), p. 663–715. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/s00222-012-0420-5. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s00222-012-0420-5.

[Sol12] Maarten SOLLEVELD. “On the classification of irreducible representations of affine Hecke algebras with unequal parameters”. In : *Represent. Theory* 16 (2012), p. 1–87. ISSN : 1088-4165. DOI : 10.1090/S1088-4165-2012-00406-X. URL : http://dx.doi.org/10.1090/S1088-4165-2012-00406-X.

[SS13] Peter SCHOLZE et Sug Woo SHIN. “On the cohomology of compact unitary group Shimura varieties at ramified split places”. In : *J. Amer. Math. Soc.* 26.1 (2013), p. 261–294. ISSN : 0894-0347. DOI : 10.1090/S0894-0347-2012-00752-8. URL : http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-2012-00752-8.

[ST93] Paul J. SALLY Jr. et Marko TADIĆ. “Induced representations and classifications for $\mathrm{GSp}(2,F)$ and $\mathrm{Sp}(2,F)$”. In : *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* 52 (1993), p. 75–133. ISSN : 0037-9484.

[Vog93] David A. VOGAN Jr. “The local Langlands conjecture”. In : *Representation theory of groups and algebras*. T. 145. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 305–379. DOI : 10.1090/conm/145/1216197. URL : http://dx.doi.org/10.1090/conm/145/1216197.

[Wal04] Jean-Loup WALDSPURGER. “Représentations de réduction unipotente pour $\mathrm{SO}(2n+1)$: quelques conséquences d'un article de Lusztig”. In : *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, p. 803–910.